名古屋大学大学院工学研究科博士課程（前期課程）

機械システム工学専攻

マイクロ・ナノ機械理工学専攻

航空宇宙工学専攻

基礎部門 試験問題

（全 7 頁，表紙を含む）

2017 年 8 月 22 日（火）

13:30～16:30（3 時間）

注意事項

○問題 1, 2, 3, 4(数学)は，全て解答せよ.
○問題 5, 6(物理学)は，どちらか1問を選択して解答せよ.
○解答は，問題ごとに別の答案用紙に記入せよ.
○各答案用紙の所定の欄に受験番号，解答する問題番号を記入せよ.（解答欄に何も記入できなかった場合でも，問題番号を必ず記入すること.）
○答案の作成は黒色の鉛筆またはシャープペンシルに限る.
○この試験問題冊子および草稿用紙は試験終了後回収する.

問題１

(1) 以下の不定積分を求めよ.

1) $\displaystyle\int \frac{x^3+2x+1}{x^5-x^4+2x^3-2x^2+x-1}dx$

2) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin x+\cos x+1}dx$

【ヒント】$t=\tan\frac{x}{2}$としてもよい.

(2) 以下の極限値を求めよ.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin^{-1}x}{x^3}\quad(-1\le x\le 1)$$

【ヒント】$x=\sin\theta$ $\left(-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right)$としてもよい.

(3) ２次元直交デカルト座標系上の曲線Ｃ上の点(x,y)が次のように表される．

$$x=\frac{1}{\theta+1}\cos\theta,\quad y=\frac{1}{\theta+1}\sin\theta\quad(0\leqq\theta\leqq\theta_0)$$

曲線Ｃの長さLが以下の式で表されることを示せ.

$$L=\int_0^{\theta_0}\left\{\frac{\sqrt{1+(\theta+1)^2}}{(\theta+1)^2}\right\}d\theta$$

問題２

(1) 大きさ2×2の実定数行列$\boldsymbol{A}$を考え，以下の問いに答えよ（最終的な答えのみならず途中の導き方についても示すこと）．

1) 以下の関係を満たすとき，$\boldsymbol{A}$を求めよ．

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{A}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\7\end{pmatrix}$$

2) $\boldsymbol{A}$のすべての固有値を求めよ．

3) 問(1)-2)で求めた固有値に対応するすべての固有ベクトルを求めよ．

4) $\boldsymbol{A}$について，ケーリー・ハミルトンの定理を用いて，$\boldsymbol{A}^5$と$\boldsymbol{A}^{-1}$を求めよ（具体的に各要素を計算せよ）．また，問(1)-1)の２つの式について，ここで求めた$\boldsymbol{A}^{-1}$をそれぞれの式の両辺左側から掛けるとき，２つの式がともに満たされていることを示せ（$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}$を実際に計算せよ）．

5) $\boldsymbol{A}$について，行列の対角化を用いることによって，$\boldsymbol{A}^m$を求めよ（mは整数である）．

(2) 大きさ$n\times n$の実定数行列$\boldsymbol{B}$と，同じ大きさで正則な実定数行列$\boldsymbol{U}$を考える．このとき，以下の問いに答えよ（最終的な答えのみならず途中の導き方についても示すこと）．ただし，$\boldsymbol{B}$の固有値はすべて相異なる値とする．

1) $\boldsymbol{B}$の固有値と行列$\tilde{\boldsymbol{B}}=\boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{U}$の固有値が同じであることを示せ．

2) $\boldsymbol{B}$の固有値をλ_i $(i=1,\ldots,n)$とし，それに対応する固有ベクトルを$\boldsymbol{v}_i$とする．このとき，$\tilde{\boldsymbol{B}}$の固有値λ_i $(i=1,\ldots,n)$に対応する固有ベクトル$\tilde{\boldsymbol{v}}_i$と$\boldsymbol{v}_i$の関係を示せ．

問題 3

以下の問いに答えよ．

(1) 次の常微分方程式の一般解を求めよ．

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(1+x^2)y^3}{(y^2-1)x^3}$$

(2) 次の常微分方程式の一般解を求めよ．

$$x^2\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2$$

$$\text{ヒント：} \int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$$

(3) 次の常微分方程式の一般解を求めよ．

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + y = \cos 2x$$

(4) 常微分方程式$x(1+x)y'' - 2y' - 2y = 0$を，定数rおよびa_mを用いて表される以下の級数解を用いて解くことを考える．ただし，$|x| < 1$であるものとする．

$$y = x^r \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m \quad (a_0 \neq 0)$$

1) rを求めるための決定方程式を導出し，その解r_1およびr_2を求めよ．ただし，$r_1 > r_2$であるものとする．

2) r_1に対する同常微分方程式の基底y_1を，a_0を用いて示せ．ただし答えは級数式のままでもよいものとする．

ヒント: 同常微分方程式がxに対して恒等的に 0 となる条件を考えよ．

問題 4

三次元直交座標系（デカルト座標系）において，x 軸，y 軸，z 軸の正の方向の単位ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$ とする．以下の問いに答えよ．

(1) ベクトル $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ がそれぞれ $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - 3\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b} = 2\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} - 5\boldsymbol{k}$ で与えられるとする．

1) $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ を二辺とする平行四辺形の面積 S を求めよ．

2) $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ を二辺とする平行四辺形の単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ を求めよ．

3) 点 $\boldsymbol{r}_0 = (1, 2, -1)$ を通り，$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ と平行な平面の方程式を求めよ．

(2) 円柱面 $\boldsymbol{r} = \cos v\boldsymbol{i} + \sin v\boldsymbol{j} + 2u\boldsymbol{k}$ $(-\infty < u < \infty,\ 0 \leqq v \leqq 2\pi)$ と，2 つの平面 $z = -2$ および $z = 2$ で囲まれる領域の全表面を S とし，ベクトル場 $\boldsymbol{a}$ を $\boldsymbol{a} = x^2z\boldsymbol{i} + yz^2\boldsymbol{j}$ とする．表面 S での面積分 $\int_S \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{n}dS$ を求めよ．ただし，$\boldsymbol{n}$ は S の単位法線ベクトルであり，領域外側に向かう方向を正とする．

(3) ベクトル場 $\boldsymbol{a}$ を $\boldsymbol{a} = y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j} + 2z\boldsymbol{k}$ とする．経路 C に沿ったベクトル場 $\boldsymbol{a}$ の線積分 $\int_C \boldsymbol{a} \cdot d\boldsymbol{r}$ を求めよ．ただし，経路 C を $\boldsymbol{r} = 3t\boldsymbol{i} + (1-t)\boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}$ $(0 \leqq t \leqq 2)$ とする．

(4) ベクトル場 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ をそれぞれ，$\boldsymbol{a} = (2x-y)\boldsymbol{i} - yz^2\boldsymbol{j} - y^2z\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b} = \mathrm{rot}\,\boldsymbol{a}$ とする．また，曲面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ の $z \geqq 0$ に対応する部分を S とする．曲面 S での面積分 $\int_S \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{n}dS$ を求めよ．ただし，$\boldsymbol{n}$ は S の単位法線ベクトルであり，原点のある側から他の側に向かう方向を正とする．

問題5

図1のような長さlの質量が無視できる棒がある．棒の一端は支持点Oに取り付けられ，棒はそのまわりで自由に回転できる．棒の他端は質量mの物体の重心Gに取り付けられており，その重心Gまわりの物体の慣性モーメントはIである．この棒を回転ばね定数$^{(*)}$がkのばねで支持する．以下，これを振り子と呼ぶ．振り子の角度は鉛直上方向から反時計まわりを正とする角度θで表す．ばねが自然長（変形していない状態）のときの振り子の角度をθ_0とする．鉛直下方向に重力が作用するとし，重力加速度をgとする．以下の問いに答えよ．

（＊）回転ばね定数：加えたモーメントを振り子の角変位 $\theta-\theta_0$ で割った比例定数

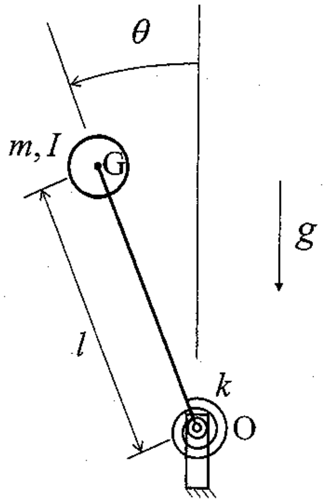

図1

(1) 支持点Oまわりの振り子の慣性モーメントI_Aを求めよ．

以下では，慣性モーメントの記号I_Aをそのまま用いよ．

(2) 振り子の運動方程式を求めよ．

(3) 振り子の平衡状態（つりあいの状態）を$\theta=\theta_{eq}$とする．平衡状態$\theta=\theta_{eq}$を求める条件式を示せ．

(4) ばねの自然長の状態の角度を$\theta_0=0$とする．

1) そのときの平衡状態を示す関係式を求めよ．

2) $\theta_{eq}=0$はその平衡状態の1つである．いま，振り子をそのごく近傍$\theta\approx 0$から角速度$\dot{\theta}=0$で離す．平衡状態$\theta_{eq}=0$まわりの微小範囲の運動の特性を回転ばね定数kの値に対して分類し，それぞれ説明せよ．

(5) 平衡状態が$\theta_{eq}=\pi/2$であるとする．

1) そのときのばねの自然長の状態の角度θ_0を求めよ．

2) その平衡状態のごく近傍$\theta\approx\pi/2$で振り子を離すと，その平衡状態$\theta_{eq}=\pi/2$まわりで振り子が微小振幅で単振動する．運動方程式を用いて，その固有角振動数を求めよ．

問題6

図１に示すように，中心軸をz軸とする半径aの円形コイルが，xy 平面内に固定して置いてある．そのコイルには，図1に示す向きに大きさIの定常電流（円電流）が流れている．

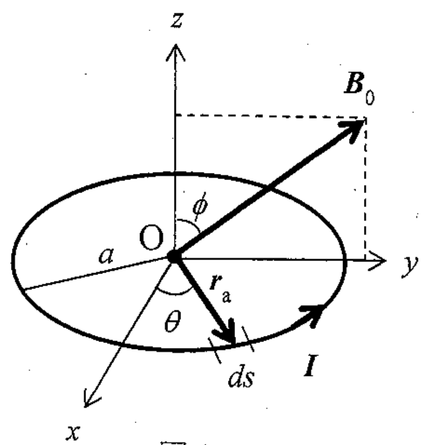

図１

(1) コイルの置かれている空間にz軸とのなす角をϕとする一様な磁場$\boldsymbol{B}_0 =$ $(0, B_0\sin\phi, B_0\cos\phi)$を加えた．コイルが磁場から受けるトルク $\boldsymbol{T}$ を求めたい．

1) x 軸となす角をθとする位置ベクトル $\boldsymbol{r}_a$ で示される円形コイル上の点を流れる電流の方向を示す単位ベクトルを求めよ．

2) x 軸となす角をθとする位置ベクトル $\boldsymbol{r}_a$ で示される微小区間（長さds）が$\boldsymbol{B}_0$から受ける力を$d\boldsymbol{F}_a$とする．ベクトル $d\boldsymbol{F}_a$をI, B_0, ds, θ, ϕを用いて成分表示せよ．

3) x 軸となす角をθとする位置ベクトル $\boldsymbol{r}_a$ で示される微小区間（長さ ds）にはたらくx軸まわりのトルクの大きさdTを求めI, B_0, ds, θ, ϕ, aを用いて表せ．

4) コイル全体が磁場から受けるx軸まわりのトルクの大きさTをθ による積分で求めB_0, I, a, ϕを用いて表せ．

5) コイルの面積$S\,(=\pi a^2)$ と円電流Iにより磁気双極子 $\boldsymbol{m}$ を $\boldsymbol{m} = SI\boldsymbol{e}_z$ と定義する．ここで，$\boldsymbol{e}_z$は，z 軸方向の単位ベクトルである．$\boldsymbol{T}$を$\boldsymbol{B}_0$, $\boldsymbol{m}$を用いて表せ．

(2) 円電流から十分に離れた遠方の位置 $\boldsymbol{r}$ におけるベクトルポテンシャル$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$は問(1)の5)で定義した $\boldsymbol{m}$ と真空の透磁率μ_0を用いて

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi|\boldsymbol{r}|^3}(\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{r}) \qquad ①$$

と表される．$B_0 = 0$ として以下の問いに答えよ．

1) ベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$と磁場 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$の間の関係を式で示せ．

2) 図１の円電流が十分に離れた遠方につくる磁場 $\boldsymbol{B}_d(\boldsymbol{r})$を①式より求めよ．

3) 図１の円電流から十分に離れた遠方において，z 軸上の磁場を考える．その大きさの原点からの距離 r に対する依存性，およびその向きを示せ．

4) 図１の円電流から十分に離れた遠方において，x 軸上の磁場を考える．その大きさの原点からの距離 r に対する依存性，およびその向きを示せ．