名古屋大学大学院工学研究科博士前期課程

機械システム工学専攻

マイクロ・ナノ機械理工学専攻

航空宇宙工学専攻

基礎部門 試験問題

（全 7 頁，表紙を含む）

2018 年 8 月 21 日（火）

13:30～16:30（3 時間）

注意事項

〇問題 1, 2, 3, 4(数学)は，全て解答せよ.
〇問題 5, 6(物理学)は，どちらか1問を選択して解答せよ.
〇解答は，問題ごとに別の答案用紙に記入せよ.
〇解答開始後，各答案用紙の所定の欄に受験番号，解答する問題番号を記入せよ.（解答欄に何も記入できなかった場合でも，問題番号を必ず記入すること.）
〇答案の作成は黒色の鉛筆またはシャープペンシルに限る.
〇この試験問題冊子および草稿用紙は試験終了後回収する.

問題 1

(1) 以下の不定積分を求めよ．

$$\int \frac{x^2+2x+5}{x^3+5x^2+7x+3}\,dx$$

(2) 以下の問いに答えよ．

1) 次の関数について， $\lim_{x\to 0} y = 1$ となることを示せ．

また，導関数 $\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ．

$$y = \sin^x(x^2), \qquad (-\sqrt{\pi} < x < \sqrt{\pi})$$

ヒント：$\sin^x(x^2) = e^{\log\{\sin^x(x^2)\}}$を用いてもよい．

2) 次の関数について， $\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ．

$$y = x\sqrt{a^2-x^2} - a^2\cos^{-1}\frac{x}{a}\ , \qquad (a>0)$$

ヒント：右辺第 2 項を$\theta = a^2\cos^{-1}\dfrac{x}{a}$としてもよい．

(3) nを 0 以上の整数とする．以下の問いに答えよ．

1)

$I_n = \displaystyle\int x^n \sin x\,dx$ とする．

nが 2 以上のとき，I_nは漸化式

$I_n = -x^n\cos x + nx^{n-1}\sin x - n(n-1)I_{n-2}$を満たすことを示せ．

2)

$J_n = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} x^n\ \sin x\,dx$ とする．J_5を求めよ．

問題２

(1) 二次元のベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ について，二次形式

$$Q = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A} \boldsymbol{x} = 5x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_2^2$$

を考える．ただし，$\boldsymbol{A}$ は二次の対称行列，$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}$ は $\boldsymbol{x}$ の転置である．以下の問いに答えよ．

1) 対称行列 $\boldsymbol{A}$ を求めよ．

2) $\boldsymbol{A}$ の固有値，および固有値に対する固有ベクトルを求めよ．なお，固有ベクトルの大きさを1にすること．

3) $\boldsymbol{A}$ を対角化した行列を $\boldsymbol{B}$ とする．$\boldsymbol{B}$ を求めよ．

4) 二次元のベクトル $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ について，$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x}$ とする．ただし，$\boldsymbol{X}$ は $\boldsymbol{A}$ の固有ベクトルを列ベクトルとしてもつ行列である．$\boldsymbol{B}$ と $\boldsymbol{y}$ を用いて Q を表せ．

5) 二次形式 Q の標準形を多項式で表せ．

ヒント：二次形式の標準形は，二次元ベクトルの各変数の二乗の項のみで構成される多項式で表される．

(2) 行列 $\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ について，以下の問いに答えよ．

1) $\boldsymbol{C}^2$ を求めよ．

2) 行列式 $\det(\lambda \boldsymbol{E} - \boldsymbol{C})$ を求めよ．ただし，$\boldsymbol{E}$ は三次の単位行列である．

3) 逆行列 $\boldsymbol{C}^{-1}$ を求めよ．

問題３

(1) 次の常微分方程式の一般解を求めよ．

$$(x^2 + xy)\frac{dy}{dx} = y^2$$

(2) 次の常微分方程式の一般解を求めよ．

$$(-4x^2y + 6x^2)\frac{dy}{dx} - y^3 + 5y^2 - 6y = 0$$

(3) 次の常微分方程式の一般解を求めよ．

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 6\frac{dy}{dx} + 9y = \sin 3x$$

(4) 次の常微分方程式について，以下の問いに答えよ．

$$(3x^2 + 8xy^3)dx + (12x^2y^2 + 8y^3)dy = 0 \qquad \text{(a)}$$

ただし，$M(x,y) = 3x^2 + 8xy^3$，$N(x,y) = 12x^2y^2 + 8y^3$ とする．

1) (a)式が完全微分方程式であることを示せ．

2) $\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = M(x,y)$，$\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = N(x,y)$が成り立つとき，$u(x,y)$を求め，(a)式の一般解を求めよ．

ヒント：$M(x,y)$，$N(x,y)$が，u をそれぞれ x，y で偏微分したものであることに注意せよ．逆に，$M(x,y)$を x について積分したもの，あるいは $N(x,y)$を y について積分したものが u である．

問題 4

三次元直交座標系（デカルト座標系）において，x 軸，y 軸，z 軸の正の方向の単位ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$ とする．以下の問いに答えよ．

(1) $\boldsymbol{r} = t\boldsymbol{i} + (t^2 - 1)\boldsymbol{j}\ (-1 \leq t \leq 1)$ で表される放物線 C に沿って，線積分

$$\int_C \{(x^2 - y)dx + (x + y)dy\}$$

を求めよ．ただし，$t = -1$ から $t = 1$ へ進む方向を正とする．

(2) 平面 $2x + 2y + z = 6$ が x 軸，y 軸，z 軸と交わる点をそれぞれ P，Q，R とする．3 点 P，Q，R を結ぶ線分で囲まれた三角形を S とする．スカラー場 $\varphi = 3x + 2y + z$ の S 上における面積分

$$\iint_S \varphi dS$$

を求めよ．

(3) ベクトル場 $\boldsymbol{A} = xz^3\boldsymbol{i} + 3xyz\boldsymbol{j} + 2z^2\boldsymbol{k}$ について考える．円柱側面 $x^2 + y^2 = 4$ と二つの平面 $z = 0$ および $z = 2$ に囲まれた円柱領域の全表面を S とする．このとき，S 上における面積分

$$\iint_S \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n}\, dS$$

を求めよ．ただし，$\boldsymbol{n}$ は領域外部へ向かう方向を正とする S の単位法線ベクトルとする．

(4) ベクトル場 $\boldsymbol{A} = y\boldsymbol{i} - 2xz\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$ について考える．式 $x^2 + y^2 + z = 4\ (z \geq 0)$ で表される放物面を S とする．S 上における面積分

$$\iint_S (\nabla \times \boldsymbol{A}) \cdot \boldsymbol{n}\, dS$$

を求めよ．ただし，$\boldsymbol{n}$ は放物面外側に向かう方向を正とする S の単位法線ベクトルとする．

問題５

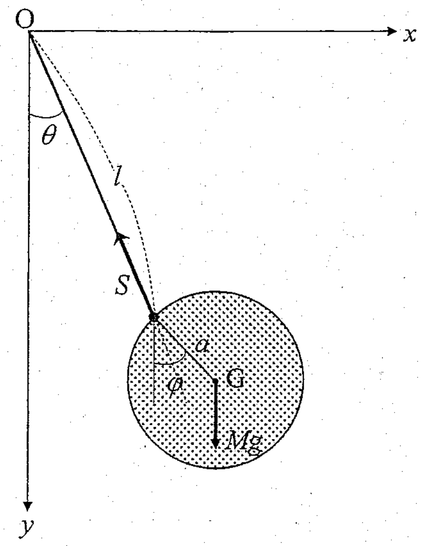

図 1

図１のように質量の無視できる長さ l の糸の先に半径 a の一様な円板をつけて鉛直面内で微小な振動をさせることを考える（円板は常にその面が振動面内にあるものとする）．ただし，糸の固定点をＯとし，水平に x 軸，鉛直下方に y 軸をとり，円板の質量を M，重力加速度を g とする．また，図１のように糸および円板の鉛直線からの傾き角をそれぞれ θ, φ とする．以下の問いに答えよ．空気抵抗は無視する．

(1) 円板の重心 G の座標を (x_G, y_G) としたとき重心 G の並進運動に対する運動方程式を書け．ただし，糸の張力を S とする．

(2) 重心のまわりの円板の慣性モーメント I を求め，円板の回転の運動方程式を書け．

(3) x_G 及び y_G を，l, a, θ, φ を用いてそれぞれ示せ．

(4) θ, φ が小さいとき，問(1)の運動方程式から変数 x_G, y_G を消去し，問(1), (2)の並進及び回転の運動方程式を，変数 θ, φ と定数 a, g, l を用いた微分方程式に書き直せ．ただし，θ, φ の二次以上の項を無視することとする．

(5) 問(4)で求めた微分方程式の解として

$$\theta = A\cos(\omega t + \alpha),\ \varphi = B\cos(\omega t + \alpha)$$

とおいたとき，ω （> 0）の満たす方程式を導け．

(6) 問(5)で求めた式において，$\omega = 2\pi/T$（T は振動の周期）とし，T について解くとき，物理的に意味のある二つの解のうち一方の解が長さ $l + a$ の単振り子の振動の周期と一致することを示せ．ただし，$(a/l) \ll 1$ として (a/l) の二次以上の項を無視するものとする．

問題６

2枚の導体板A, Bが真空中に平行におかれている．導体板の厚さは，導体板の間隔 d と比較して十分薄いとする．導体板に垂直に x 軸をとり，導体板A, Bの位置の x 座標を，それぞれ $0, d\ (d > 0)$ とする（図1）．また，これらの導体板の面積は S であり，導体板は十分に広く，端の効果は無視してよい．真空の誘電率を ε_0 として以下の問いに答えよ．

(1) 導体板A, Bに,それぞれ電荷 $+Q$, $-Q$ $(Q > 0)$ を与える．

1) 導体板Aの x 軸正側表面の電荷面密度 σ_1，および，x 軸負側表面の電荷面密度 σ_2 を求めよ．

2) 導体板A, Bの両方の電荷が，導体板の外に作る電界を $\mathbf{E}_1$ とする．電界 $\mathbf{E}_1$ のx成分 E_{1x} を，$x<0$, $0<x<d$, $d<x$ の各領域で，それぞれ求めよ．

3) 導体板A, Bの両方の電荷による電位を V_1 とする．電位 V_1 の分布を求めるとともに，電位分布を図示せよ．なお，$x = 0$ における電位を0とする．電位の図示では，電位 V_1 を縦軸，x 軸を横軸とし，$x = d$ における電位を記入すること．

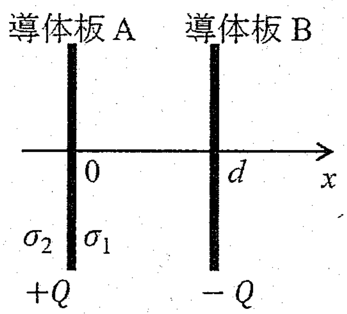

図1

(2) 問(1)の帯電導体板A, Bの間に，さらに電荷を体積密度 ρ $(\rho > 0)$で，一様に分布させる(図2)．

1) 導体板Aの x 軸正側表面の電荷面密度 σ_3，および，x 軸負側表面の電荷面密度 σ_4 を求めよ．ただし，電荷面密度は，変数を Q, ρ, S, d から選んで表すこと．

2) 導体板A, B上の電荷，および導体板間の電荷が導体板の外につくる電界を $\mathbf{E}_2$ とする。電界 $\mathbf{E}_2$ のx成分 E_{2x} を，$x<0$, $0<x<d$, $d<x$ の各領域で，それぞれ求めよ．

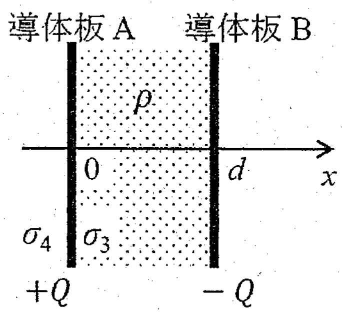

図2

3) 導体板A, Bおよび，導体板間の電荷による電位を V_2 とする．電位 V_2 の分布を求め，電位 V_2 が最大となる点の座標と電位 V_2 の最大値を求めるとともに,電位分布を図示せよ．なお，$x = 0$ における電位を0とする．電位の図示では，電位 V_2 を縦軸，x 軸を横軸とし，電位 V_2 が最大となる点をグラフ上に明示し，そのx座標と電位を記入すること．