名古屋大学大学院工学研究科博士前期課程

機械システム工学専攻

マイクロ・ナノ機械理工学専攻

航空宇宙工学専攻

基礎部門 試験問題

（全８頁，表紙を含む）

2019 年 8 月 27 日（火）

13:30～16:30（3 時間）

注意事項

○問題 1，2，3，4（数学）は，全て解答せよ．
○問題 5，6（物理学）は，どちらか１問を選択して解答せよ．
○解答は，問題ごとに別の答案用紙に記入せよ．
○解答開始後，各答案用紙の所定の欄に受験番号，解答する問題番号を記入せよ．（解答欄に何も記入できなかった場合でも，問題番号を必ず記入すること．）
○答案の作成は黒色の鉛筆またはシャープペンシルに限る．
○この試験問題冊子および草稿用紙は試験終了後回収する．

問題１

(1) $\alpha > 0$ を正の定数とする．x に関する以下の関数を考える．ただし，$\arctan(x)$ は $\tan(x)$ の逆関数を表し $-\frac{\pi}{2}$ から $\frac{\pi}{2}$ の値をとるものとする．

$$f_\alpha(x) = \arctan(x) - \arctan(\alpha x)$$

1) おのおのの α について $f_\alpha(x)$ が最大となる x をすべて求めよ．

2) $\alpha = 3 - 2\sqrt{2}$ のとき，$f_\alpha(x)$ の最大値を単位をラジアンとして求めよ．

（ヒント：$\tan x$ の加法定理を用いる）

(2) 次の極限値を求めよ．

$$\lim_{x \to 0} \frac{2x^2 - 1 + \cos(2x)}{x^4}$$

(3) 次の積分を計算せよ．

$$\iint_D \sqrt{\frac{1 - x^2 - y^2}{1 + x^2 + y^2}}\, dxdy$$

ただし，$D = \{(x, y) \mid \frac{1}{2} \leq x^2 + y^2 \leq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$ とする．

3次の正方行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ のとき，以下の問いに答えよ．

(1) 正方行列 A の階数 $\mathrm{rank}\, A$ を求めよ．

(2) 正方行列 A の固有値，固有ベクトルを求めよ．

(3) $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ のとき $PJ = AP$ を満たす3次の正方行列 J を求めよ．

(4) A^n を求めよ．ただし，$n \geq 3$ とする．

(ヒント) 前問で求めた J を $J = \lambda E + R$ とするとよい．ただし，λ は実数，E は単位行列，R は等式を満たす行列とする．

(5) $\exp B = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B^n}{n!}$ と定義し，正方行列 $B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ のとき，$\exp B = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} \end{pmatrix}$ となることを導出せよ．ここで，$B^0 = E$ (単位行列) である．

問題３

（１） 次の微分方程式について以下の問いに答えよ.

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\omega y=0$$

1) 上の微分方程式の一般解を$\omega<0$, $\omega=0$, $\omega>0$の場合に分けて求めよ.
なお, 解には虚数を含まず実数の形で表すものとする.

2) 1)で得られた各場合の一般解において, $y(0)=0$, $y(L)=0$を満たす$y(x)\equiv 0$でない関数があるか調べよ. ある場合はその関数を示せ. (Lは正の実数とする)

3) 2)で求めた関数の直交性を調べよ. 計算の過程を示す事.

ヒント：関数列y_m (mは整数)の直交性は$\int_0^L y_m(x)y_n(x)dx=0, (m\neq n)$ にて示される. 計算において必要であれば,

$$\sin\theta\sin\varphi=\frac{\cos(\theta-\varphi)-\cos(\theta+\varphi)}{2}, \cos\theta\cos\varphi=\frac{\cos(\theta-\varphi)+\cos(\theta+\varphi)}{2}$$

$$\sin\theta\cos\varphi=\frac{\sin(\theta+\varphi)+\sin(\theta-\varphi)}{2}$$

を用いても良い.

（２） ネイピア数(自然対数の底)eの値を級数の形で表す.
以下の問いに答えよ.

1) $\frac{dy}{dx}=y$, $y(0)=1$の初期値問題の解を求めよ.

2) 1)の解を$y=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$とおく事によって求めよ.

3) 1), 2)の結果を用いてeの値を級数の形で表せ.

三次元直交座標系（デカルト座標系）において，x軸，y軸，z軸の正の方向の単位ベクトルをそれぞれ$\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$とする．以下の問いに答えよ．

(1) 領域$E=\left\{(x,y,z)\middle|\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1, z=0\right\}$において，$(x,y)=(au,bv)$および$(u,v)=(r\cos\theta, r\sin\theta)$とする．$a,b$は正の定数で$0\le r\le 1, 0\le\theta\le 2\pi$である．

1) ヤコビ行列$J_1=\begin{bmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{bmatrix}$および$J_2=\begin{bmatrix}\frac{\partial u}{\partial r} & \frac{\partial u}{\partial \theta}\\ \frac{\partial v}{\partial r} & \frac{\partial v}{\partial \theta}\end{bmatrix}$の行列式を求めよ．

2) 1)で求めた行列式を用いて，領域Eの面積Sを求めよ．

3) 領域Eの境界C上の点の位置ベクトルを$\boldsymbol{h}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}$とする．$\theta$が増加する方向を正とし，境界$C$に沿ったベクトル場$\boldsymbol{A}=(x-3y)\boldsymbol{i}+(y+3x)\boldsymbol{j}$の線積分$\int_C \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{h}$を求めよ．
ヒント：ストークスの定理を用いると良い．

(2) ベクトル場$\boldsymbol{A}=-a^2y\boldsymbol{i}+axz\boldsymbol{j}+xy\boldsymbol{k}$について考える．円柱面$S_1: x^2+y^2=a^2$とする．$a$は正の定数である．

1) 円柱面S_1と平面$S_2: z=a$の交線をC_1とし，C_1に沿った線積分$I_1=\int_{C_1}\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r}$を求めよ．ただし，$\boldsymbol{r}$は$C_1$上の点の位置ベクトルであり，$z$軸上で$z>a$の点から$C_1$をみて反時計回りを正とする．

2) 円柱面S_1上の曲線$\boldsymbol{r}=a\cos t\,\boldsymbol{i}+a\sin t\,\boldsymbol{j}+\frac{at}{2\pi}\boldsymbol{k}$ $(0\le t\le 2\pi)$をC_2とする．$t=0$を始点とし，C_2に沿った線積分$I_2=\int_{C_2}\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r}$を求めよ．

(3) スカラー場$\phi=x^2y+y^2z+2xz^2$が与えられる．

1) ϕの勾配（$\mathrm{grad}\,\phi$）を$\boldsymbol{A}$とする．$\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}$および$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}$を求めよ．

2) 領域$V=\{(x,y,z)|0\le x\le 2, 0\le y, 0\le z, y^2+z^2\le 9\}$を考える．領域$V$の表面を$S$，その外側方向の単位法線ベクトルを$\boldsymbol{n}$とし，$\iint_S \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}dS$を求めよ．
ヒント：ガウスの発散定理を用いると良い．

問題５

図１のような，粗い表面を持つ半径aの円筒が中心軸 O を水平にして固定されている．円筒の頂点に，半径b，質量mの一様な円板を静かにのせて手放すと，円板は円筒面上をすべらずに転がり，ある位置で円板が円筒から離れた．円板が円筒から離れる前までは，円板の重心 G は，円筒の中心軸 O から G までの距離$a+b$を半径とする円周上を動くものとする．円板が円筒と接する点を A，OA が鉛直上方となす角をθ，$\theta=0$での点 A の位置を円筒の頂点，円板が円筒から離れる位置の角θをθ_{sp}，点 A での摩擦力と垂直抗力をそれぞれFとR，円板の重心のまわりの角速度をω，重力加速度をg，円板の重心を通り円板に垂直な回転軸のまわりの慣性モーメントを$\frac{1}{2}mb^2$，θの時間tに関する微分を$\frac{d\theta}{dt}$とし，以下の問いに答えよ．

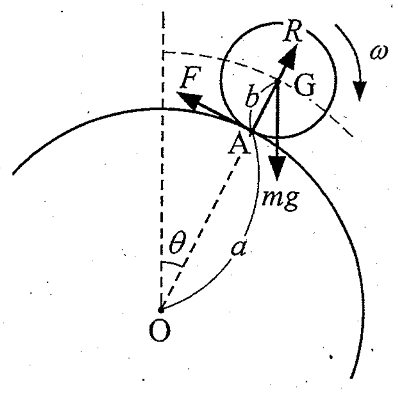

図１

(1) $0<\theta<\theta_{sp}$のとき，円板の重心 G における回転軸と GO とに垂直な方向（接線方向）と，GO 方向（法線方向）の運動方程式をそれぞれ示せ．ただし，答には，m，g，a，b，θ，$\frac{d\theta}{dt}$，$\frac{d^2\theta}{dt^2}$，F，R 以外の記号を用いないこと．

(2) $0<\theta<\theta_{sp}$のとき，円板の重心のまわりの回転運動を考える．

1) 円板の重心のまわりの回転運動に対する運動方程式を，m，g，a，b，$\frac{d\omega}{dt}$，F，Rのうち必要な記号を用いて示せ．

2) 円板が点 A ですべらずに転がるとき，円板の重心の速さと点 A における円板の外周の速さとの間に成り立つ関係を，m，g，a，b，$\frac{d\theta}{dt}$，ω，F，Rのうち必要な記号を用いて示せ．

3) 円板に働く摩擦力Fを，m，g，θを用いて示せ．

4) 円板が頂点にあるときの重心の位置と，円板の重心の速さがv_0 に達したときの重心の位置との高度差を，v_0，gを用いて示せ．

(3) 円板が円筒から離れるときの$\cos\theta_{sp}$を求めよ．

(4) 円筒の固定を外し，円筒が中心軸 O のまわりで自由に回転できるようにした．円筒の頂点に円板を静かにのせて手放すと，円板は円筒面上をすべらずに転がった．円筒の質量をm，円筒の慣性モーメントをma^2，円板が円筒から離れる位置の角θをθ_{sp2}としたとき，$\cos\theta_{sp2}$を求めよ．

問題6

図1に示すように真空中に設置された半径 a の円形コイル C_a に定常電流 I が流れている．コイル C_a の中心Oを原点，中心軸を z 軸とする円柱座標をとる．z 軸上でコイル C_a から距離 h の点Pの位置に，コイル C_a と中心軸を一致させコイル面を平行にして半径 b の小円形コイル C_b を置いた．以下の問いに答えよ．真空の透磁率は μ_0 とする．
なお解答においては，円柱座標系(r, θ, z)における以下の公式を用いて良い．

$$(\nabla\times\boldsymbol{A})_r=\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial\theta}-\frac{\partial A_\theta}{\partial z},\quad (\nabla\times\boldsymbol{A})_\theta=\frac{\partial A_r}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial r},\quad (\nabla\times\boldsymbol{A})_z=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta)-\frac{1}{r}\frac{\partial A_r}{\partial\theta}$$

(1) コイル C_a の電流が点Pにつくる磁界の大きさを求めよ．

(2) コイル C_a の電流素片 $I\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ が，コイル C_b 上の点 $\mathrm{K}(b,\theta,h)$（ここで θ は点Kの方位角）につくる磁界のベクトルポテンシャルの方位角方向成分を，$\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ の方位角 φ と点Kの座標(b,θ,h)を用いて表せ．ただし，$\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ と点Kの距離を L としたとき $L^2=h^2+a^2+b^2-2ab\cos(\theta-\varphi)$ である．

(3) コイル C_a の電流素片 $I\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ が，コイル C_b 上の点 $\mathrm{K}(b,\theta,h)$につくる磁界の半径方向成分を求めよ．

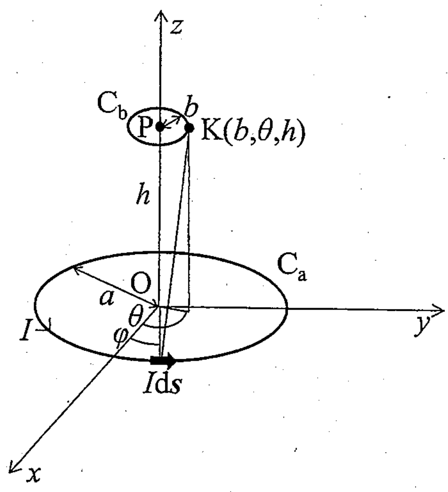

図1

小円形コイル C_b にもコイル C_a と同じ大きさの定常電流 I を同じ向きに流した．コイル C_b に働く力を仮想変位によるエネルギー変化から求めたい．ただし，小円形コイル C_b の半径 b は十分に小さく，コイル内の磁界は一様であるとみなす．以下の問いに答えよ．

(4) コイル C_a とコイル C_b との相互インダクタンス M を求めよ．

(5) コイル C_b を z 軸方向に時間 δt で微小変位させて相互インダクタンスが δM 変化したとき，誘導起電力 e_b によりコイル C_b の回路系のエネルギーが変化した．このエネルギーの変化量が $\delta U_b=\int_0^{\delta t}e_b I\mathrm{d}t$ であることを考慮し，δU_b を δM と I を用いて表せ．

（問題6は次頁に続く）

(6) コイル C_b を仮想的に z 軸方向に微小変位させたときのコイル C_a, C_b の回路系のエネルギーと磁気エネルギーの和である全体のエネルギーの変化から，コイル C_b に z 軸方向に働く力の大きさと向きを求めよ．