

名古屋大学大学院工学研究科博士前期課程

機械システム工学専攻

マイクロ・ナノ機械理工学専攻

航空宇宙工学専攻

基礎部門 試験問題

(全 7 頁, 表紙を含む)

2021 年 8 月 24 日 (火)

13:30~16:30 (3 時間)

注意事項

- 問題 1, 2, 3, 4(数学)は, 全て解答せよ.
- 問題 5, 6(物理学)は, どちらか1問を選択して解答せよ.
- 解答は, 問題ごとに別の答案用紙に記入せよ.
- 解答開始後, 各答案用紙の所定の欄に受験番号, 解答する問題番号を記入せよ. 科目名は記入する必要はない.
- 解答欄に何も記入できなかった場合でも, 問題番号を必ず記入すること.
- 答案の作成は黒色の鉛筆またはシャープペンシルに限る.
- この試験問題冊子および草稿用紙は試験終了後回収する.

問題 1.

(1) 不定積分 $\int \sin^4 x \cos^3 x dx$ を求めよ.

(2) 以下の問いに答えよ.

1) 不定積分 $\int \frac{1}{x^2+a^2} dx$ を求めよ.

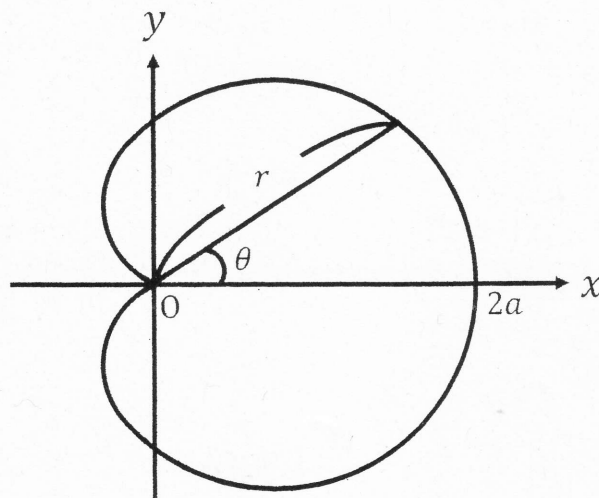
ヒント) 変数変換を用いて求めることが出来る.

2) $a \neq 0$, n を自然数, C を定数とするとき, 次の式が成り立つことを示せ.

$$\int \frac{1}{(x^2+a^2)^{n+1}} dx = \frac{x}{2na^2(x^2+a^2)^n} + \frac{2n-1}{2na^2} \int \frac{1}{(x^2+a^2)^n} dx + C$$

3) 不定積分 $\int \frac{1}{(x^2+4)^3} dx$ を求めよ.

(3) 図のような心臓形 $r = a(1 + \cos \theta)$, ($a > 0$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$) の囲む面積, および周の長さを求めよ.



問題 2.

$A_n = [a_{ij}]$ を $a_{ij} = \begin{cases} i & (i = j) \\ 1 & (i \neq j) \end{cases}$ である n 次正方行列とする. ただし, $i, j = 1, 2, \dots, n$ とする. 以下の問いに答えよ.

- (1) A_2 のすべての固有値, 固有ベクトルを求めよ.
- (2) A_n の行ベクトルの一次独立な最大個数を求めよ.
- (3) A_n の行列式の値を求めよ.
- (4) A_n は実対称行列の例である. 実対称行列 A において, 異なる固有値に対応する固有ベクトルは直交することを示せ.

(ヒント 1) 実数を要素とする 2 つの列ベクトル x_i, x_j に対し, ${}^t x_j x_i = 0$ のとき x_i, x_j は直交する. ただし ${}^t x_j$ は x_j の転置を示す.

(ヒント 2) 2 つの異なる固有値とそれに対応する固有ベクトルをそれぞれ λ_i, x_i および λ_j, x_j とおき, ${}^t x_j A x_i$ を異なる 2 つの形に変形させる.

問題 3.

(1) 次の常微分方程式の一般解を求めよ.

$$\cos^2 x \frac{dy}{dx} - \sin^2 y = 0$$

(2) 次の常微分方程式の一般解を求めよ.

$$(2x^2y + y^3)dx + (xy^2 - 2x^3)dy = 0$$

(3) 次の常微分方程式の一般解を求めよ.

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 6\frac{dy}{dx} + 9y = e^{3x}$$

(4) 次の常微分方程式の一般解を求めよ.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} + 2y = e^{-2x} \sin x$$

問題 4.

三次元直交座標系（デカルト座標系） O - xyz を用いる．図1のように，原点 O で互いに直交する x 軸， y 軸， z 軸をとる．以下の問いに答えよ．

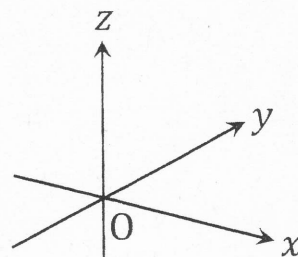


図 1

- (1) 曲面上の点 (x, y, z) が $x = u \cos \theta$, $y = u \sin \theta$, $z = \theta$ ($0 \leq u \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi$)でパラメータづけられる曲面を S とする．曲面 S の単位法線ベクトル $\mathbf{n}$ を z 成分が負となる向きに定め，面積要素を dS とする．

1) 曲面 S の単位法線ベクトル $\mathbf{n}$ を求めよ．

2) スカラー場 $\phi(x, y, z)$ を $\phi(x, y, z) = yz$ と定義する．曲面 S 上でのスカラー場 $\phi(x, y, z)$ の面積分 $\iint_S \phi(x, y, z) dS$ の値を求めよ．

3) ベクトル場 $\mathbf{a}(x, y, z)$ を $\mathbf{a}(x, y, z) = (z, x^2 + y^2, -xy)$ と定義する．曲面 S 上でのベクトル場 $\mathbf{a}(x, y, z)$ の面積分 $\iint_S \mathbf{a}(x, y, z) \cdot \mathbf{n} dS$ の値を求めよ．

- (2) ベクトル場 $\mathbf{a}(x, y, z)$ を $\mathbf{a}(x, y, z) = (x + y, y - x, -z^2)$ とし， $2x + 3y + 6z = 6$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ の四平面に囲まれた三角錐領域を V とする．三角錐領域 V の体積要素を dV とするととき，体積分 $\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{a}(x, y, z) dV$ の値を求めよ．

問題 5.

質量密度が一様な円板が点Oを中心に反時計回りに回転している。時刻 $t=0$ s の時にブレーキがかけられてからの円板の回転角を θ として以下の問いに答えよ。

- (1) 1分間あたりの回転数の単位を rpm と表す。図1のように、円板が 500 rpm で回転している。この円板にブレーキをかけはじめたところ、円板は時刻 t_s で停止した。この間円板は、等角加速度で減速した。また、 $t=60$ s の時の回転数は 300 rpm であったとする。以下の問いに答えよ。なお、円周率には π を用いよ。

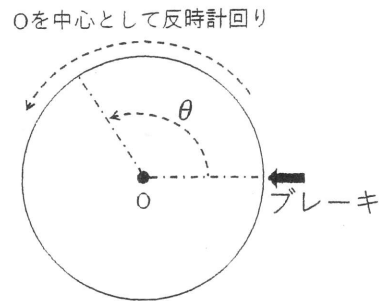


図 1

- 1) $t=0$ s での1分間あたりの回転数

$\omega_0 = d\theta/dt = 500$ rpm および $t=60$ s での1分間あたりの回転数

$\omega_{60} = d\theta/dt = 300$ rpm を rad/s の単位に変換せよ。

- 2) ブレーキがかけられた時からの任意の時刻 t における角速度 $\omega = d\theta/dt$ を式で示せ。

- 3) ブレーキのかけ始めから、停止に要するまでの時間 t_s を求めよ。

さらに $t=0$ から $t=t_s$ までの円板の総回転数を求めよ。

- (2) 図2に示す円板の半径を R 、質量を m とし、角速度 ω_0 で反時計回りに回転しているとする。ここにブレーキパッドを一定の力 F で円板の中心方向に押し付け減速させる。なお、円板の慣性モーメントは $(1/2)mR^2$ であり、またブレーキパッドと円板間の動摩擦係数を μ とする。

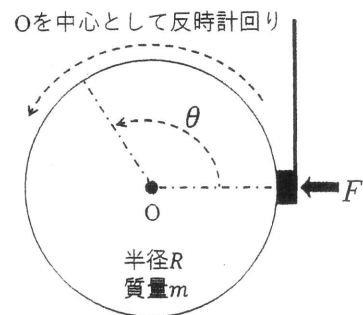


図 2

- 1) 円板の回転の運動方程式を示せ。

ただし、回転角 θ の時間 t に対する1階微分を $d\theta/dt$ 、2階微分を $d^2\theta/dt^2$ とする。

- 2) 問1)で求めた式を用いて、角速度 ω および角度 θ の式を示せ。

- 3) 円板は θ_1 回転して、停止した。この時にブレーキパッドに加えた力 F を求めよ。

- 4) 円板が最初に持っていた運動エネルギーはすべて熱に変換されるものとして、ブレーキをかけてから静止するまでの単位時間あたりに発生する熱量 P を時間の関数として示せ。

問題 6.

電極面積 S で厚さを無視できる 2 枚の長方形導体板を間隔 d で平行に置いたコンデンサについて、以下の問いに答えよ。なお、極板間は真空中で、真空の誘電率を ϵ_0 とする。また、電極面積は十分広く、コンデンサ端部の電界の影響は無視できるとし、重力の影響はないものとする。

図 1 のように、コンデンサの電極に $\pm Q$ の電荷を与える。

- (1) コンデンサの電極間電界の大きさ E を求めよ。また、コンデンサの静電容量 C を求めよ。
- (2) コンデンサに蓄えられている静電エネルギー U_1 を求めよ。また、電極に働く z 軸方向の力 f_1 の大きさと向きを求めよ。

次に、図 1 のコンデンサの電極と x - y 断面の形状が同じ面積 S 、厚さ $d/3$ 、誘電率 $4\epsilon_0$ の帯電していない誘電体板を用意した。その誘電体板を、図 2 のように、電極に平行に端から x_0 だけ挿入する。誘電体板の上端と上部電極との距離は $d/3$ とする。また、誘電体端部の電界の影響を無視する。

- (3) 誘電体がコンデンサの電極間に完全に引き込まれた場合 ($x_0 = a$)、コンデンサの静電容量 C_2 を求めよ。
- (4) 問(3)と同様、 $x_0 = a$ の場合のコンデンサの電極間の電界分布、電束密度分布、電位分布を下部電極からの距離 z ($0 \leq z \leq d$) の関数として図示せよ。なお、 $z = 0$ での電位を 0 V とする。
- (5) 誘電体がコンデンサの電極間に完全に引き込まれていない場合 ($0 < x_0 < a$)、コンデンサに蓄えられている静電エネルギー U_2 を求めよ。また、誘電体板に働く x 軸方向の力 f_2 を求めよ。
- (6) いま誘電体を x 軸方向に電極の中心まで挿入した場合 ($x_0 = a/2$) を考える。誘電体が挿入されている部分 ($0 < x < a/2$) と挿入されていない部分 ($a/2 < x < a$) の電位分布を下部電極からの距離 z ($0 \leq z \leq d$) の関数として図示せよ。なお、 $z = 0$ での電位を 0 V とする。

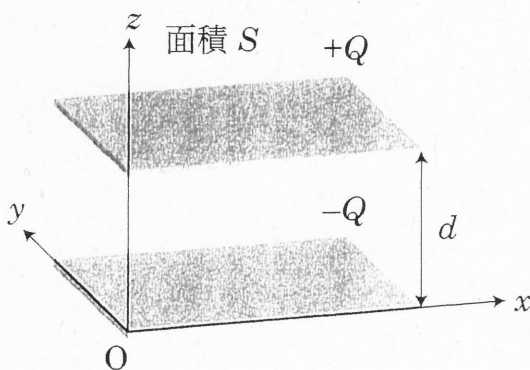


図 1

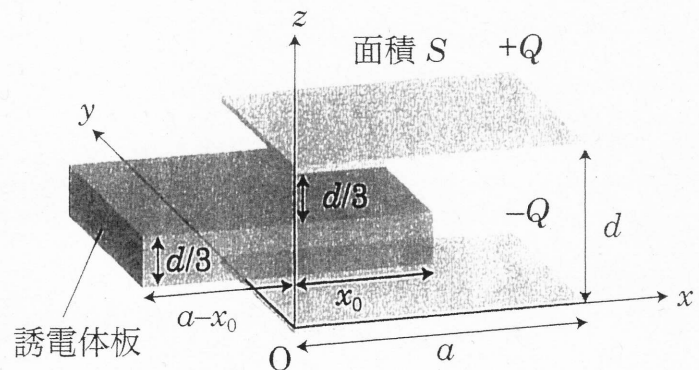


図 2