名古屋大学大学院工学研究科博士前期課程

機械システム工学専攻

マイクロ・ナノ機械理工学専攻

航空宇宙工学専攻

専門部門 試験問題

（全８頁，表紙を含む）

2024 年 8 月 21 日（水）

9:00～12:00（3 時間）

注意事項

○ 5 問の中から 3 問を選択して解答せよ．
○解答は，問題ごとに別の答案用紙に記入せよ．
○解答開始後，各答案用紙の所定の欄に受験番号，解答する問題番号を記入せよ．
○解答欄に何も記入できなかった場合でも，問題番号を必ず記入すること．
○答案の作成は黒色の鉛筆またはシャープペンシルに限る．
○この試験問題冊子および草稿用紙は試験終了後回収する．

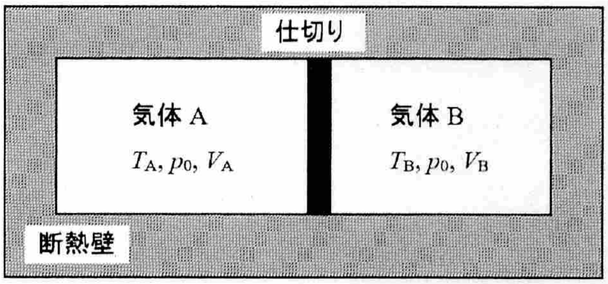
問題1．以下の問いに答えよ．ただし，導出過程も示すこと．

(1) 式①は 1 モルの気体に対するファン・デル・ワールスの状態方程式である．ここで，pは圧力，vは体積，Tは絶対温度，Rは一般気体定数，aとbはそれぞれ正の定数であり，$v>b$とする．この気体の内部エネルギーuは式②を満足する．この気体の体積をv_1からv_2（$v_1>v_2$）まで準静的に等温変化させた．この気体になされた仕事，内部エネルギー変化量，エントロピー変化量を求めよ．

$$\left(p+\frac{a}{v^2}\right)(v-b)=RT \qquad ①$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_T = T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v - p \qquad ②$$

(2) 右図のように体積が無視できる仕切りがある容器を考える．理想気体 A，B の体積は V_A，V_B，温度は T_A，T_B であり，圧力は両気体ともp_0である．容器全体の体積は一定である．仕切りを取り除くと，2 つの気体は混合して熱平衡状態になる．容器は断熱壁で囲われており，混合の過程で相変化や反応は起こらないとする．また，両気体のモル当たりの定積比熱をc_v，一般気体定数をRとする．このとき，以下の問いに答えよ．



1) B 側が真空の場合，仕切りを取り除くと気体 A は断熱自由膨張する．熱平衡後の気体 A の温度 T'_A と圧力 p'_A を求めよ．

2) 気体 A と B の混合過程をそれぞれ断熱自由膨張と考えると，混合後の圧力 p' はいくつになるか．また，そのときの温度 T' も求めよ．

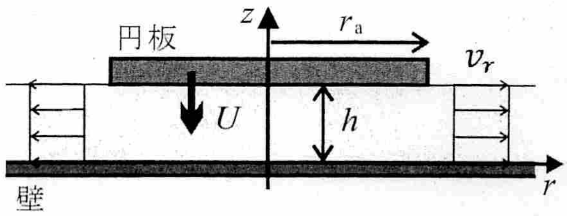
3) 仕切りを取り除く前と後で内部エネルギーが保存されることを利用し，混合後の温度 T' を求めよ．また，理想気体の状態方程式を利用し，混合後の圧力 p' を求めよ．

(3) 多層平板の内部における 1 次元の定常熱伝導問題を考える．熱はx方向に流れるとし，多層平板を構成する各平板の厚みをΔxとする．$x=0$における熱流束をqとし，その位置での温度をT_0とする．i番目の平板の熱伝導率をk_i（$i=1\sim n$），その内部の熱流束をq_i，$x=x_i$における温度をT_iとする．ただし，多層平板の熱伝導率の温度依存性はない．このとき，以下の問いに答えよ．

1) T_{i-1}とT_iの間に成り立つ関係式（漸化式）を示せ．

2) 温度T_nをT_0，q，Δx，k_iを使って表せ．

問題２．以下の問いに答えよ．



(1)図のように，半径r_aの円板が，一定速度Uで壁に向かって鉛直(z)方向下向きに押し下げられている．円板と壁の間は密度ρの液体（非圧縮性・非粘性流体）で満たされており，液体は円板と壁の間から半径(r)方向に速度v_rで流出している．v_rおよび流体の圧力は周方向位置や高さに依存せず，液体の高さは円板より外側($r > r_\mathrm{a}$)でも円板と壁との距離hに等しいとみなす．なお，重力や表面張力は無視できる．

1) $r\,(\leq r_\mathrm{a})$での半径方向速度v_rを，h, r, Uを用いて表せ．

2) $r\,(\geq r_\mathrm{a})$での半径方向速度v_rを，h, r, r_a, Uを用いて表せ．

3) v_rのr方向分布$(0 \leq r < \infty)$を，v_rを縦軸に，rを横軸にとって図示せよ．

4) $r = r_\mathrm{a}$での半径方向の流体の加速度を求めよ．

5) $r = r_\mathrm{a}$での液体の圧力が 0 であるとき，$r\,(\leq r_\mathrm{a})$における圧力pを，ベルヌーイの式より求めよ．

6) 円板を速度Uで押し下げるのに必要な力Fを求めよ．

(2)$x-y$直交座標系において，二次元・定常・非圧縮性・非粘性流体のx方向速度u，y方向速度vが$(u, v) = (A\sin x\cos y, B\cos x\sin y)$で表される流れ場を考える．ただし，$A, B$は定数かつ$A > 0$であり，領域は$0 < x < \pi, 0 < y < \pi$とする．連続の式および定常な流れに対する$x$方向および$y$方向の運動方程式（オイラー方程式）は，それぞれ以下のとおりである．ここで，ρは密度，pは圧力である．

連続の式　$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

x方向のオイラー方程式　$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x},$$

y方向のオイラー方程式　$$u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}.$$

1) 連続の式より，$A + B = 0$であることを示せ．（以降は$B = -A$としてよい．）

2) この流れは渦無し流れか？渦有り流れか？根拠と共に示せ．

3) $\frac{\partial p}{\partial x}$を，$A, \rho, x$を用いて表せ．

4) 圧力pを，A, ρ, x, yおよび積分定数C_0を用いて表せ．必要であれば$\sin 2x = 2\sin x\cos x$の関係を用いよ．

5) $0 < x < \pi, 0 < y < \pi$の領域における二次元の速度ベクトルマップを描け．

問題３．以下の問いに答えよ．

質量mの円柱棒について考える．円柱棒に働く重力，円柱棒が空気から受ける力は無視する．図１に示すように，xyz座標系は円柱棒に固定された系である．図２, 図３に示すように，円柱棒が空間固定座標系(XYZ座標系)のZX平面内で運動する．xyz座標系とXYZ座標系は右手系である．ZX平面とzx平面とは平行である．円柱棒の点Ｐは，ばねとねじりばねを介してXYZ座標系内の固定点につながっている．点ＰはZ方向だけに動く．点Ｐの$-Z$方向の変位をhとする．この時，Z軸方向に$k_h h$(k_hは，ばね定数, $k_h > 0$)の力が点Ｐで円柱棒に働く．x軸とX軸とが成す角をθとし，θは微小であるとする．y軸回り（y軸の正の方向に対して右ねじ方向が正）に$-k_\theta \theta$（k_θは，ねじりばね定数, $k_\theta > 0$）のモーメントが点Ｐで円柱棒に働く．円柱棒のy軸回りの慣性モーメントをIとする．

(1) 図２のように，点Ｐが円柱棒の重心に一致する（点Ｐが$(x, y, z) = (0,0,0)$にある）場合を考える．

1) 円柱棒の重心の並進と重心回りの回転の運動方程式を，hとθを変数として既述の記号を用いて表せ．

2) hに関する振動の固有角振動数$\omega_{\mathrm{n}h}$とθに関する振動の固有角振動数$\omega_{\mathrm{n}\theta}$を，既述の記号を用いて表せ．

(2) 図３のように，点Ｐが円柱棒の$(x, y, z) = (a, 0, 0)$（ただし$a > 0$）にある場合を考える．

1) 円柱棒の重心の並進と重心回りの回転の運動方程式を，hとθを変数として既述の記号を用いて表せ．

2) 固有角振動数の小さい方をω_{n1}，大きい方をω_{n2}とする．$\omega_{\mathrm{n}h}$，$\omega_{\mathrm{n}\theta}$が満足する式と$\omega_{\mathrm{n1}}$，$\omega_{\mathrm{n2}}$が満足する式とを比較することで，

$\omega_{\mathrm{n1}} < \omega_{\mathrm{n}h}$，$\omega_{\mathrm{n1}} < \omega_{\mathrm{n}\theta}$，$\omega_{\mathrm{n2}} > \omega_{\mathrm{n}h}$，$\omega_{\mathrm{n2}} > \omega_{\mathrm{n}\theta}$が成立することを示せ．

3) 固有振動モードにおいて，Z軸方向の運動がないx軸上の点Ｑ($x = \bar{x}$，ただし$\bar{x} \neq 0$)について考える．(2)の 1)で求めた２つの方程式を，$\bar{x}$とθの式に書き直せ．$\omega_{\mathrm{n1}}^2 > 0$および$\omega_{\mathrm{n2}}^2 > 0$であることから，$\bar{x}$の範囲を示せ．

4) ω_{n1}，ω_{n2}における振動の様子を，ω_{n1}，ω_{n2}のそれぞれに対応させて図示せよ．各図にはhが最大の時の円柱棒を描き，X軸，点P, 点Ｑを示すこと．

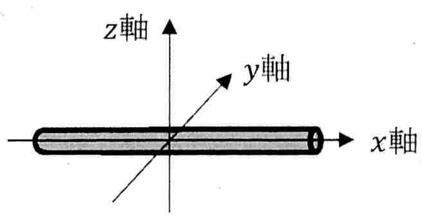


図１

（問題３は次ページに続く）

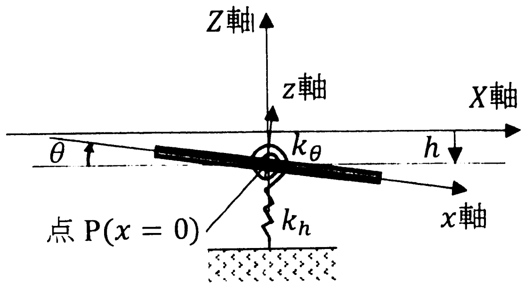


図 2

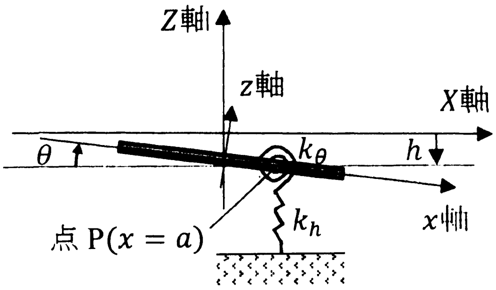


図 3

問題４.
以下の設問に答えよ.
(1)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

によって状態空間表現される制御対象に対して,

$$u(t) = -\begin{bmatrix} f_1 & f_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + r(t)$$

のフィードバック制御を行なった場合，以下の問いに答えよ.
ただし，f_1 と f_2 は定数とする.

1) 入力を $u(t)$，出力を $y(t)$ とした時の制御対象の伝達関数 $P(s)$ を求めよ.

2) 閉ループシステム (目標値 $r(t)$ から観測変数 $y(t)$) を状態方程式で記述せよ.

3) 閉ループシステムの伝達関数 $W(s)$ を求めよ.

4) 閉ループシステムにおいて固有角周波数 $\omega_n = 2$ [rad/s], 減衰係数 $\zeta = 0.6$ となるようにフィードバックゲイン f_1 と f_2 の値を求めよ.

5) 閉ループシステムにおいて可観測ではなくなる時の f_1 と f_2 の関係を求めよ.

(2)

1) 図１のフィードバック制御系を考える．定数ゲイン $K_1 > 0$ と $K_2 > 0$ を適切に選ぶことにより，出力 $y(t)$ がステップ目標値 $r(t) = 1$ およびランプ目標値 $r(t) = t$ に定常偏差なく追従することを示せ.

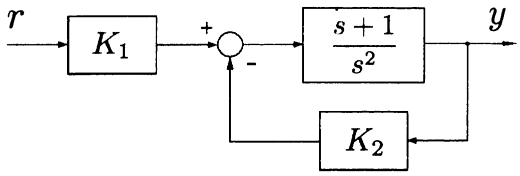


図１

2) 図１の K_2 を $K_3/(s+2)$ へ変更した場合，ステップ目標値に対して定常偏差が０となる定数ゲイン $K_1 > 0, K_3 > 0$ の組み合わせを１つ求めよ.

3) 図１の K_2 を $K_3/(s+2)$ へ変更した場合，定数ゲイン $K_1 > 0, K_3 > 0$ をどのように選んでもランプ目標値には追従できないことを示せ.

（問題４は次ページに続く）

(3)

1) ゲイン線図の折れ線近似が図2のようになる伝達関数を1つ求めよ．

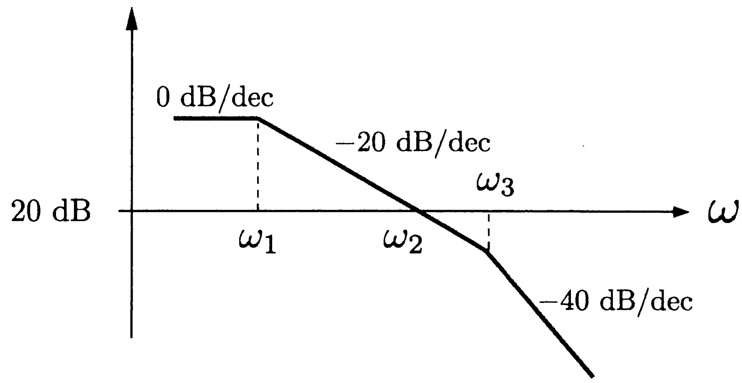


図 2

2) 図3のブロック線図において R_2 から Y_2 までの伝達関数を求めよ．

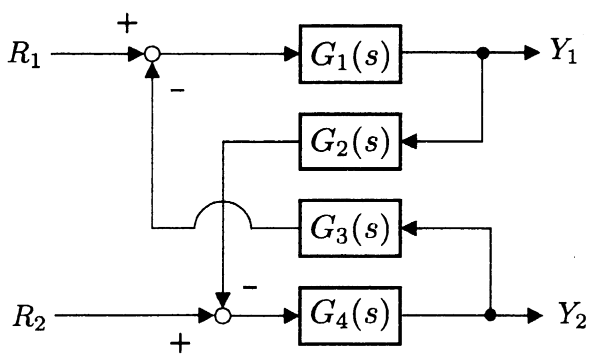


図 3

問題５． 以下の問いに答えよ．

(1) 図１に示す長さ l の単純支持ばり AB の間の点 C にモーメント M_0 が加えられている．ここで，AC 間距離 a は $l/2$ より大きい．はりの左端 A を原点，はりの素材のヤング率を E，断面二次モーメントを I とし，次の問いに答えよ．

1) 支点 A および B の反力 R_A, R_B を求めよ．

2) 曲げモーメント図（BMD）を描け．

3) たわみ曲線 y を求めよ．

4) 支点 A および B におけるたわみ角を求めよ．

5) はりが図２の円筒断面を持つ場合，最大曲げ応力を求め，d_1, d_2 により示せ．

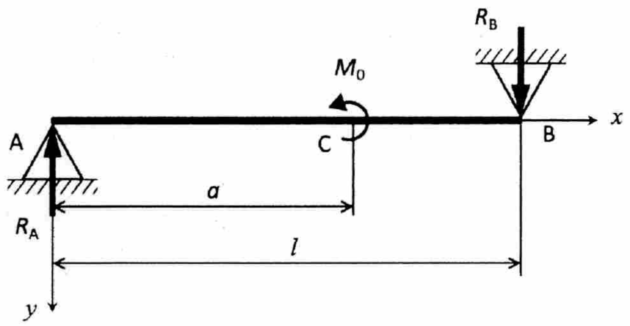


図１

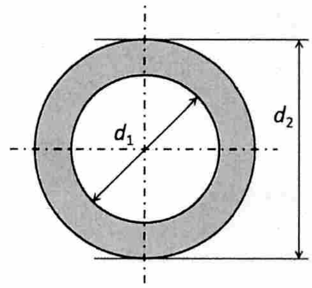


図２

(2) 図３に示すように，円柱（線膨張係数α_1，ヤング率 E_1，断面積 A_1）と円筒（線膨張係数α_2，ヤング率 E_2，断面積 A_2）の両端を剛体板により接合した長さ l の複合棒を考える．ただし，円柱と円筒は同心とし，接合した状態では応力はないものとする．温度をΔT 上昇させたとき，次の問いに答えよ．

1) 円柱と円筒に生じる軸力をそれぞれ P_1，P_2 と置き，力のつり合いを示せ．

2) 円柱と円筒に生じる軸力 P_1，P_2 を求めよ．

3) 複合棒の見かけの線膨張係数を求めよ．

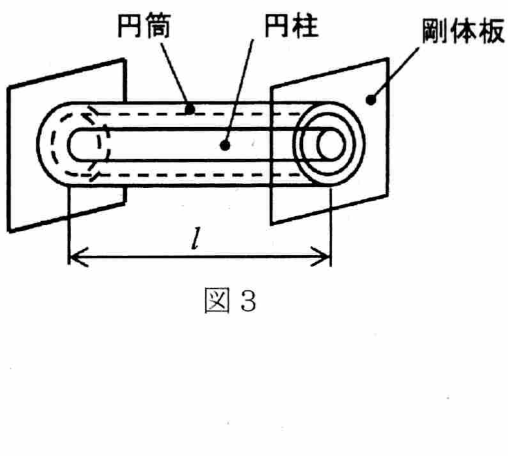


図３