名古屋大学大学院工学研究科博士前期課程

機械システム工学専攻

マイクロ・ナノ機械理工学専攻

航空宇宙工学専攻

専門部門　試験問題

（全８頁，表紙を含む）

2021 年 8 月 25 日（水）

9:00～12:00（3 時間）

注意事項

○５問の中から３問を選択して解答せよ．
○解答は，問題ごとに別の答案用紙に記入せよ．
○解答開始後，各答案用紙の所定の欄に受験番号，解答する問題番号を記入せよ．科目名は記入する必要はない．
○解答欄に何も記入できなかった場合でも，問題番号を必ず記入すること．
○答案の作成は黒色の鉛筆またはシャープペンシルに限る．
○この試験問題冊子および草稿用紙は試験終了後回収する．

問題１．

(1) 閉じた系において質量 m の理想気体に，図 1 に示すような可逆サイクルを行わせる．A→B は断熱膨張変化，B→C は等圧冷却変化，C→A は等積加熱変化である．p は圧力，V は体積，S はエントロピーである．また，R は気体定数，κは比熱比である．この理想気体の状態変化は準静的であることを仮定する．下記の問いに答えよ．

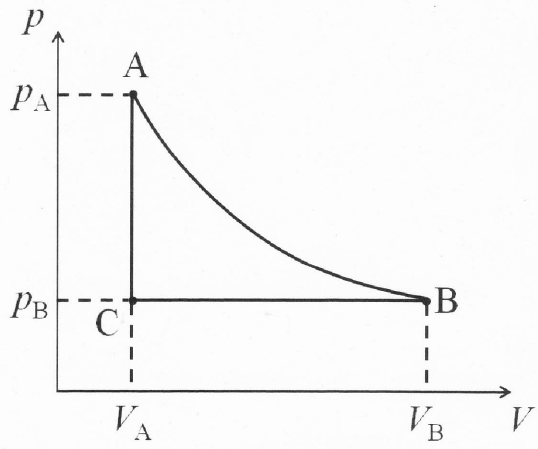

図 1

1) A→B, B→C, C→A におけるそれぞれのエントロピー変化量$\Delta S_{A\to B}$，$\Delta S_{B\to C}$，$\Delta S_{C\to A}$を m，V_A，V_B，R，κのうち必要なものを用いて表せ．

2) このサイクル（A→B→C→A）における正味の仕事を p_A，p_B，V_A，V_B，κのうち必要なものを用いて表せ．

(2) 純物質の気相および液相の二相平衡について考える．平衡時における単位質量あたりの蒸発熱rが絶対温度 T を用いて$r = a + bT$（a，b は定数）で表されるとすると，飽和圧力 p と絶対温度 T の関係が式①となることを証明せよ．ただし，二相平衡においてギブス自由エネルギーは変化せず，この純物質の気相は理想気体である．また，液相の体積は気相の体積に対して無視できるものとする．必要ならば式②を用いてもよい．なお，R は気体定数，c は定数，g は比ギブス自由エネルギー，s は比エントロピー，v は比体積である．

$$\ln p = -\frac{a}{RT} + \frac{b}{R}\ln T + c \qquad ①$$

$$\mathrm{d}g = -s\mathrm{d}T + v\mathrm{d}p \qquad ②$$

(3) 温度 T_1 の一様な空気で満たされた空間と，温度 T_2 の一様な空気で満たされた空間が，厚さ L_1，熱伝導率 k_1 である平板壁で隔てられて定常状態にある．平板壁と空気との対流熱伝達率は h である．また，$T_1 > T_2$ とする．熱は平板壁の厚さ方向に 1 次元的に伝わり，ふく射は考えないものとする．

1) 平板壁を通過する熱流束（単位面積あたりの伝熱量）q を T_1，T_2，L_1，k_1，h を用いて表せ．

2) この平板壁の片側に熱伝導率が k_2 の断熱材を貼り付けて熱流束を半分に抑える時，断熱材の厚さ L_2 を L_1，k_1，k_2，h を用いて表せ．

問題 2. 以下の問いに答えよ．

(1) 図１のように，風洞内の一様流速 U を(A)ピトー管，(B)天井に糸で吊るされたピンポン球を用いて計測する．流体は非圧縮性で密度をρ，重力加速度は g とする．

1) (A)において図中の圧力p_1, p_2はそれぞれ静圧，動圧，全圧のいずれか答えよ．

2) (A)において流速Uを求めよ．

3) (B)において，ピンポン球は鉛直方向から角度θ傾いた状態で静止した．ピンポン球の質量M，直径d，抗力係数C_Dとするとき，流速Uと角度θの関係式を求めよ．なお糸はたわみがなく，流体と糸とは相互に干渉しないものとする．

4) 球の抗力係数C_Dのレイノルズ数(Re)に対する依存性は，円柱の場合と同様に，Re領域によって異なる．特に$Re = 0.1$付近と$Re = 10000$付近で異なる理由を，それぞれのRe領域における流れの形態および流体力の観点から述べよ．

(2) 図２のように，静止する平行平板間（高さ $2h$）の上半分に密度ρ_A，粘性係数μ_Aのニュートン流体 A が，下半分に密度ρ_B，粘性係数μ_Bのニュートン流体 B が，完全分離，定常，主流(x)方向に対して圧力こう配が一定，かつ完全発達した層流状態で流れている．A，B 流体の接面での x 方向速度を V とする．また，重力の影響を無視すると，二次元・定常・非圧縮性のニュートン流体に対する支配方程式は以下のように表される．式中の u は x 方向速度，vは y 方向速度，pは圧力である．

連続の式
$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

x 方向ナヴィエ-ストークス(N-S)方程式
$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

y 方向ナヴィエ-ストークス(N-S)方程式
$$u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\mu}{\rho}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)$$

1) この流れにおいて場所を問わず$v = 0$となることを，連続の式を用いて示せ．

2) A 流体の x 方向 N-S 方程式を最も簡略化された形で記述せよ．

3) A，B 各流体の x 方向速度の y 方向分布を，V を用いて表せ．x 方向に対する圧力こう配は既知であるとしてよい．

4) Vを求めよ．

5) $\mu_A > \mu_B$の場合の x 方向速度の y 方向分布の概形を図示せよ．

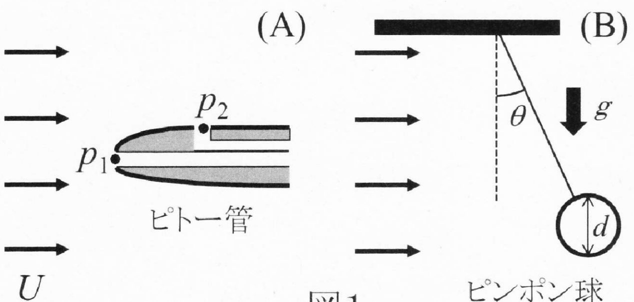

図1

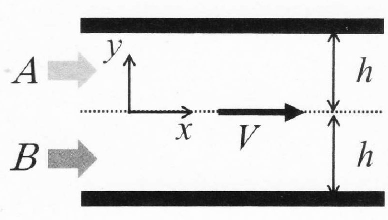

図2

問題３．

(1) 図 1 の 1 自由度振動系を考える．変位および外力は右向きを正とする．質量$m(s)$は調整パラメータs（$s > -1$）によって$m(s) = m_0(1 + s)$で変えられるとする．質量$m(s)$の変位は$x_1(t)$で表す．t は時間である．質量$m(s)$の右側はばね定数kの 3 つのばねと減衰係数cのダンパで支持されており，この 3 つのばねの合成ばね定数をk_0とする．質量$m(s)$の左側は可動壁に対してばね定数$2k_0$のばねと減衰係数cのダンパで支持されている．可動壁の変位は $x_2(t)$ で表す．質量m_0，減衰係数c，ばね定数kは一定である．パラメータ s は振動中は一定とする．以下の問いに答えよ．

1) 質量$m(s)$の右側 3 つのばねの合成ばね定数k_0を求めよ．

以降の問いにおいては，ばね定数kは用いず，ばね定数k_0を用いよ．

2) 可動壁を固定したとする（$x_2(t) = 0$）．パラメータ $s = 0$ のときに減衰比が $\zeta = 0.1$であるとする．減衰比が $\zeta = 0.2$になるときのパラメータsを求めよ．

3) 可動壁を固定したとする（$x_2(t) = 0$）．この系で減衰が無い場合を考える．固有角振動数がパラメータ$s = 0$のときの値の 1/2 倍となるパラメータsの値を求めよ．

以降の問いにおいては，左側の可動壁は$x_2(t) = A\sin\omega t$（$A > 0$）で動き，さらに質量$m(s)$には外力$f(t) = k_0 A\sin\omega t$ が作用するとする．そして質量$m(s)$の変位$x_1(t)$の定常応答のみを調べることとする．

4) この系の運動方程式を$M\ddot{x}_1 + C\dot{x}_1 + Kx_1 = F_c\cos\omega t + F_s\sin\omega t$の形で表す．$M, C, K, F_c, F_s$のそれぞれを$m_0, s, c, k_0, A, \omega$のうち必要なものを用いて表わせ．

5) 質量$m(s)$の変位$x_1(t)$の振幅を考える．$c = \sqrt{m_0 k_0}/3$，$\omega = \sqrt{3k_0/m_0}$としたときに，その振幅がA未満になるパラメータsの範囲を求めよ．

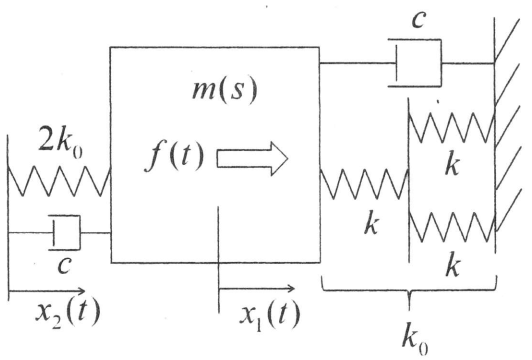

図 1

（問題３は次頁に続く）

(2) 以下の運動方程式で表される 2 自由度振動系を考える．$x_1(t)$と$x_2(t)$は変位，mは質量 ($m > 0$)，kはばね定数 ($k > 0$)，$f(t)$は外力，t は時間である．

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 + 3kx_1 - kx_2 = f(t) \\ m\ddot{x}_2 - kx_1 + kx_2 = 0 \end{cases}$$

以下の問いに答えよ．

1) この系の一次（基本）モードの固有角振動数を答えよ．そして，そのモード形状を $x_1 : x_2 = 1 : \alpha$ の形式で表したときの α を求めよ．

2) 外力が$f(t) = F\cos\omega t$ ($F > 0$) であるとき，x_1の定常応答の振幅が$F/(2k)$未満となるようなωの範囲を全て求めよ．

問題 4． 以下の設問に答えよ．なお，本問題を通して $j=\sqrt{-1}$ であるとする．

(1) つぎの伝達関数で与えられる 2 次のシステムを考える．

$$G(s)=\frac{bs+a}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

ただし，係数 a, b, ζ, ω_n は実数かつ $\omega_n>0$ であり，分母多項式，分子多項式は互いに既約であるとする．このシステムに単位ステップ入力を印加したときの応答を図 1 に示す．応答は 1 よりも大きなある値へ振動的に収束し，逆振れ（初期時刻直後に出力が負になること）を伴っている．このとき，以下の問いに答えよ．いずれの解答においても理由を数式を用いて記述すること．

1) 振動的に定常値に収束していることから，$G(s)$ は安定であり，虚部が 0 ではない極をもつ．このような条件を満たすすべての ζ を求めよ．
2) 定常値に注目することで，a と ω_n^2 の大小関係を求めよ．
3) 初期時刻での応答の傾き（微分係数）に注目し，b の符号（正，負，零のいずれか）を答えよ．

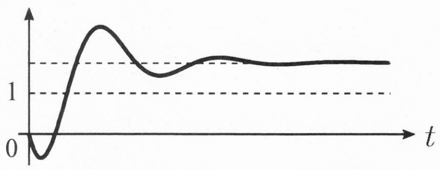

図 1: 単位ステップ応答

(2) 図 2 のフィードバック系を考える．伝達関数 $G(s), C(s)$ はプロパーな実係数有理関数である．$G(s)$ の極は複素平面の右半平面には一つしかなく，虚軸上には存在しない．また，周波数伝達関数 $G(j\omega)$ のベクトル軌跡は図 3 のようである．このとき，以下の問いに答えよ．

1) 正の実数 $k>0$ に対して $C(s)=k$ とおく．フィードバック系が安定となるすべての k を求めよ．
2) 正の実数 $p>0$ に対して

$$C(s)=\frac{s-p}{s+p}$$

とおく．まず，$|C(j\omega)|$ を計算せよ．その結果に基づき，以下の二つの条件を同時に満たす p が存在するかを理由とともに述べよ．

(i) $C(s)$ と $G(s)$ の間で極零相殺が生じない．

(ii) フィードバック系が安定である．

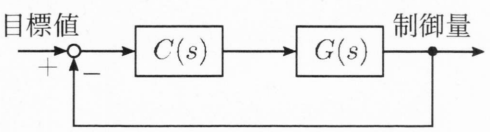

図 2: フィードバック系

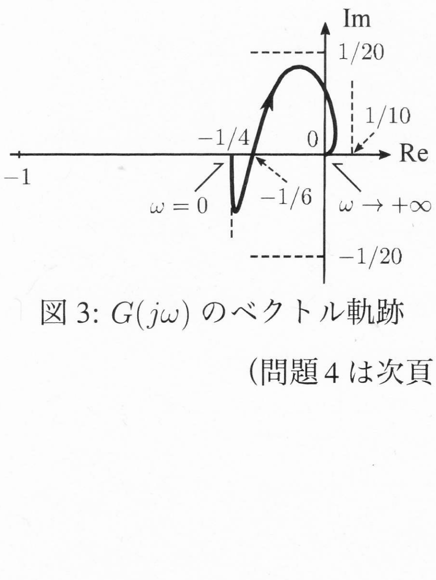

図 3: $G(j\omega)$ のベクトル軌跡

（問題 4 は次頁に続く）

(3) つぎのように状態空間表現された 1 入力 1 出力システムを考える．

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}(t) = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -\alpha \end{bmatrix} \boldsymbol{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t), \qquad y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}(t), \quad t \geq 0$$

ただし，$\boldsymbol{x}(t)$ は状態ベクトル，$u(t)$ は入力，$y(t)$ は出力であり，α は実数とする．このとき，以下の問いに答えよ．

1) システムの可制御性を調べよ．

2) 実数 k_2, k_3 を用いたつぎの状態フィードバックを施す．

$$u(t) = \boldsymbol{k}\boldsymbol{x}(t), \quad t \geq 0, \quad \boldsymbol{k} = \begin{bmatrix} 0 & k_2 & k_3 \end{bmatrix}$$

すると，閉ループ系の状態方程式は，ある行列 $\boldsymbol{A}_{\mathrm{cl}}$ を用いて以下のように書ける．

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}(t) = \boldsymbol{A}_{\mathrm{cl}}\boldsymbol{x}(t), \quad t \geq 0$$

このとき，$\boldsymbol{A}_{\mathrm{cl}}$ の固有値を $-3, -1 \pm j$ に配置する k_2, k_3 が存在するかどうかを考察し，存在する場合は k_2, k_3 の値を，しない場合はその理由を答えよ．

3) つぎに入力を $u(t) = 0, t \geq 0$ とする．初期値 $\boldsymbol{x}(0)$ として，ある二つの異なる値 $\boldsymbol{x}_{01}$, $\boldsymbol{x}_{02}$（つまり，$\boldsymbol{x}_{01} \neq \boldsymbol{x}_{02}$）を設定したとき，$\boldsymbol{x}_{01}$ に対する出力 y_1 と $\boldsymbol{x}_{02}$ に対する出力 y_2 が，すべての時刻 $t \geq 0$ で $y_1(t) = y_2(t)$ となった．このとき，α の値を求めよ．

問題５．長さ l の両端単純支持はり AB について，以下の(1)と(2)に答えよ．はりの縦弾性係数を E，断面二次モーメントを I とする．

(1) 図１に示すように，はりの A 端から距離 a の位置に集中荷重 P が作用している．荷重作用点 C のたわみを求めよ．

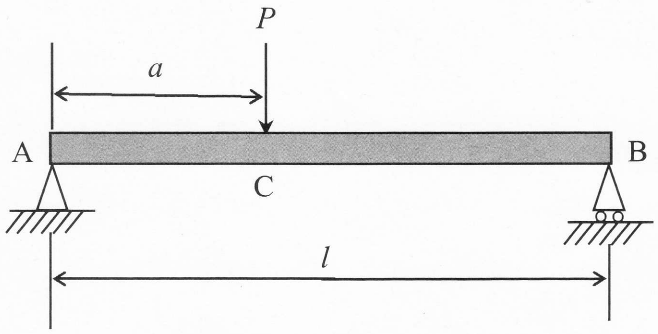

図１

(2) 図２に示すように，はりの中央に集中荷重 P が作用している．B 端から距離 b の位置をばねで支持している．ばね支持点 D の反力を求めよ．ばね定数を k とする．

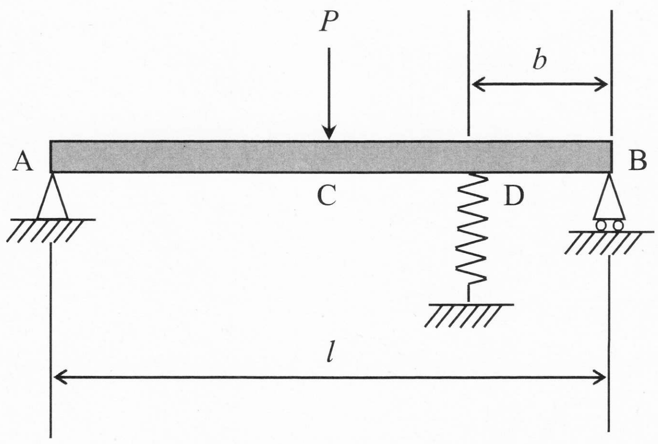

図２