名古屋大学大学院工学研究科博士前期課程

機械システム工学専攻

マイクロ・ナノ機械理工学専攻

航空宇宙工学専攻

基礎部門 試験問題

（全６頁，表紙を含む）

2022 年 8 月 23 日（火）

13:30～16:30（3 時間）

注意事項

○問題 1，2，3，4（数学）及び，問題 5（物理学）の 5 問全てに解答せよ．

○解答は，問題ごとに別の答案用紙に記入せよ．

○解答開始後，各答案用紙の所定の欄に受験番号，解答する問題番号を記入せよ．

○解答欄に何も記入できなかった場合でも，問題番号を必ず記入すること．

○答案の作成は黒色の鉛筆またはシャープペンシルに限る．

○この試験問題冊子および草稿用紙は試験終了後回収する．

問題１．

(1)次の不定積分を求めよ．

$$\int \frac{x^2+x-8}{x^3+8x^2+20x+16}\,dx$$

(2)次の極限値を求めよ．

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(\sqrt{3}x\right)-\sqrt{3}x\cos x}{x^5}$$

（ヒント：分子をテイラー展開してもよい．）

(3)次の関数の極大値と極小値をそれぞれ求めよ．

$$f(x)=x^{2x}-2x\log x \quad (x>0)$$

問題２．

(1) 三つの3次実ベクトル

$$\boldsymbol{p}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{q}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{r}=\begin{pmatrix}a^2\\b^2\\c^2\end{pmatrix}$$

を考える．ここで，a，b，c は互いに異なる実数とする．以下の問いに答えよ．

1) $\boldsymbol{p}$，$\boldsymbol{q}$，$\boldsymbol{r}$ は線形独立であることを示せ．

2) $\boldsymbol{p}$，$\boldsymbol{q}$，$\boldsymbol{r}$ をそれぞれ第1列，第2列，第3列とする3次正方行列を定義し，$(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q},\boldsymbol{r})$ と表す．同様に，$(\boldsymbol{q},-\boldsymbol{p},2\boldsymbol{r})$ を定義する．このとき，

$$(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q},\boldsymbol{r})A=(\boldsymbol{q},-\boldsymbol{p},2\boldsymbol{r})$$

を満たすような3次正方行列 A を求めよ．全ての成分を明示すること．

3) $a=-1$，$b=2$，$c=1$ とする．このとき，ベクトル $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}4\\-8\\-2\end{pmatrix}$ を $\boldsymbol{p}$，$\boldsymbol{q}$，$\boldsymbol{r}$ の線形結合として表せ．

(2) n を自然数として，二つの n 次実ベクトル

$$\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}$$

を考える．このとき，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}$（ここで T は転置を表す）の積として計算される n 次正方行列 $\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}$ を M と表す．ただし，a_1，b_1 および $\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}$（つまり，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の内積）はそれぞれ零でないと仮定する．以下の問いに答えよ．

1) M の階数（ランク）を求めよ．

2) $n=2$ の場合，M の固有値および固有ベクトルを求めよ．

3) $n=2$ の場合，M^6 を求めよ．全ての成分を明示すること．

問題３．

(1) 次の常微分方程式の一般解を求めよ．

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(x^3-3)y^2}{x^4(y+2)}$$

(2) 次の常微分方程式の一般解を求めよ．

$$\frac{dy}{dx}=\frac{8x+12y+4}{-12x-18y+3}$$

(3) 次の常微分方程式の一般解を求めよ．

$$\frac{d^2y}{dx^2}-5\frac{dy}{dx}+6y=\sin x$$

問題４．

三次元直交座標系（デカルト座標系）において，x軸，y軸，z軸の正の方向の単位ベクトルをそれぞれ$\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$とする．以下の問いに答えよ．

(1) 点 O(0,0,0)，点 A(1,1,0)，点 B(0,1,1)，点 C(1,0,1)とする．ベクトル$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$の作る平行六面体の体積 V を求めよ．

(2) スカラー場$\varphi = xy^2 + xz$について考える．点 P(1,−1,2)において，φのベクトル$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i} + \sqrt{3}\boldsymbol{j}$の方向の方向微分係数を求めよ．

(3) $\boldsymbol{r} = 3\boldsymbol{i} + u\boldsymbol{j} + v\boldsymbol{k}$ $(1 \leq u \leq 2,\ 0 \leq v \leq 3)$ で表される曲面 S において，スカラー場$\varphi = xyz$の面積分を求めよ．

(4) 点(2,0,0)，(0,2,0)，(0,0,1)を頂点とする三角形上を，この順に回る経路をCとする．

1) 三角形の法線方向の単位ベクトルを求めよ．ただし，三角形の法線ベクトルは，原点から離れる方向へ向かうものと定める．

2) ベクトル場$\boldsymbol{a} = z\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j} + y\boldsymbol{k}$について，線積分$\int_C \boldsymbol{a} \cdot d\boldsymbol{r}$を求めよ．

問題５．

水平面上に質量$2m$の小物体　Aが置かれており，質量の無視できるばねを介して壁面に固定されている．小物体　Aは静止しており，ばねは自然長にある．ばねは自然長がL，ばね定数がkであり，フックの法則に従う．空気抵抗と水平面上での摩擦，および小物体の大きさは無視できる．また本問での小物体の運動やばねの伸縮は，すべて水平面と壁面に垂直な単一の面内で起こるものとする．以下の問いに答えよ．

(1) 図１のように，ばねが伸縮する軸線上を質量mで大きさの無視できる弾丸Bが速さVで等速直線運動し，小物体Aに撃ち込まれた．弾丸は小物体を貫通せず一体となり，壁面に衝突することなく往復運動した．往復運動の振幅と周期を求めよ．

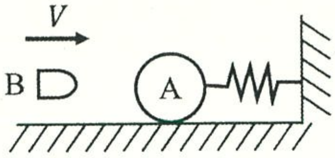

図1

(2) 図１のばねを自然長Lのゴムひもに替えた．ゴムひもは伸びた時だけフックの法則に従う復元力がはたらく．そのばね定数はkである．ゴムひもは復元力以外に小物体の運動を妨げることはなく，その質量と太さは無視できる．壁面から距離Lの位置で静止している小物体Aに，問(1)と同様に速さVで弾丸Bを撃ち込んだところ，一体化したAとBは往復運動した．この往復運動の周期を求めよ．壁面と小物体の衝突は完全弾性衝突と考えて良い．

(3) 問(2)と同じゴムひもで壁面につながれた小物体Aが壁の位置で静止している．ある時刻から小物体Aに水平面上の左向きに一定の力kLを加えつづけたところ（図２），小物体Aは往復運動した．この往復運動の周期を求めよ．

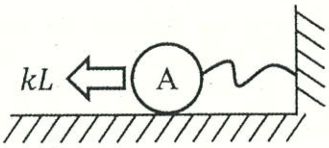

図2

(4) 図３のように，壁面の替わりに質量$4m$の小物体Cと小物体Aとが問(1)と同じばね（自然長L，ばね定数k）で接続され，水平面上に静止している．問(1)と同様に小物体Aに，速さVで弾丸Bを撃ち込んだところ，一体化したAとBはばねを介した小物体Cとともに運動した．この時のばねの伸びの最大値を求めよ．

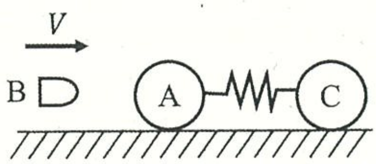

図3