名古屋大学大学院工学研究科博士前期課程

機械システム工学専攻

マイクロ・ナノ機械理工学専攻

航空宇宙工学専攻

# 基礎部門 試験問題

（全６頁，表紙を含む）

2024 年 8 月 20 日（火）

13:30～16:30（3 時間）

注意事項

○問題 1，2，3，4（数学）及び，問題 5（物理学）の 5 問全てに解答せよ．
○解答は，問題ごとに別の答案用紙に記入せよ．
○解答開始後，各答案用紙の所定の欄に受験番号，解答する問題番号を記入せよ．
○解答欄に何も記入できなかった場合でも，問題番号を必ず記入すること．
○答案の作成は黒色の鉛筆またはシャープペンシルに限る．
○この試験問題冊子および草稿用紙は試験終了後回収する．

問題 1.

(1) 次の極限値を求めよ．ただし，$a$, $b$ は実数の定数とする．

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - b^x}{x} \qquad (a, b > 0,\ a \neq b)$$

(2) 関数$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy + 1$は極値を持つか判定せよ．極値を持つ場合はその値を求めよ．

(3) 制約条件$g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 56 = 0$のもとで関数$f(x, y, z) = x + 2y + 3z$の極値を求めよ．

(4) 以下の積分を計算せよ．

$$\iint_D (x - y)^2\, dxdy,\ \ D = \{(x, y) \mid |x + y| \leq 2, |x - y| \leq 1\}$$

問題２．

以下の３次の正方行列$\mathbf{A}$について，以下の問いに答えよ．

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & -3 & 1\\ 0 & 4 & 0\\ -1 & -1 & 3\end{bmatrix}$$

ただし，この行列$\mathbf{A}$の実数の固有値を$\lambda_1$，$\lambda_2$，$\lambda_3$（ただし$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$）とし，問題中に現れるベクトル$\boldsymbol{v_1}$，$\boldsymbol{v_2}$，$\boldsymbol{v_3}$はすべての要素が実数の列ベクトルとする．また，$\|\boldsymbol{x}\|_2$はベクトル$\boldsymbol{x}$のユークリッドノルム（$\boldsymbol{\ell}^2$ノルム）を表すとする．

(1) 行列$\mathbf{A}$の固有値$\lambda_1$，$\lambda_2$，$\lambda_3$をすべて求めよ．

(2) 行列$\mathbf{A}$の固有値$\lambda_1$に対応する固有ベクトル$\boldsymbol{v_1}$を，実数のパラメータ$t$を用いた形で導出せよ．

(3) 行列$\mathbf{A}$の固有値$\lambda_2$に対応する固有ベクトル$\boldsymbol{v_2}$を，実数のパラメータ$t$を用いた形で導出せよ．

(4) 問(3)で求めた固有ベクトル$\boldsymbol{v_2}$のうち，すべての要素が非負の整数となる，ある固有ベクトル$\boldsymbol{v_2}'$（ただし$\|\boldsymbol{v_2}'\|_2 \neq 0$）を考える．このとき，

$$\mathbf{A}\boldsymbol{v_3} = \lambda_2\boldsymbol{v_3} + \boldsymbol{v_2}'$$

を満たし，かつ$\|\boldsymbol{v_3}\|_2 = 1$となる$\boldsymbol{v_3}$をすべて導出せよ．

上記の正方行列$\mathbf{A}$について，行列$\mathbf{A}^n$の$i$行$j$列の要素を${}_n a_{ij}$（$i \in \{1,2,3\}$，$j \in \{1,2,3\}$），すなわち$\mathbf{A}^n = \begin{bmatrix}{}_n a_{11} & {}_n a_{12} & {}_n a_{13}\\ {}_n a_{21} & {}_n a_{22} & {}_n a_{23}\\ {}_n a_{31} & {}_n a_{32} & {}_n a_{33}\end{bmatrix}$とする．以下の問いに答えよ．

(5) 行列$\mathbf{A}^n$の要素${}_n a_{12}$の一般形を，ジョルダン標準形の３次正方行列$\mathbf{J}$を用いて導出せよ（下記ヒント参照）．

（ヒント：(2)～(4)の解を用いて，各要素が整数となるような$\mathbf{P} = [\boldsymbol{v_1} \quad \boldsymbol{v_2}' \quad \boldsymbol{v_3}]$を定義すれば，$\mathbf{AP} = \mathbf{PJ}$の関係からジョルダン標準形の３次正方行列$\mathbf{J}$が得られる．）

問題３．

(1) 次の常微分方程式の一般解を求めよ．

$$e^{y}\frac{dy}{dx}=\frac{2x}{y+5}$$

(2) 次の常微分方程式の一般解を求めよ．

$$(2xy+y^2)dx+4x^2dy=0$$

(3) 次の常微分方程式について以下の問いに答えよ．

$$(2xy^2+y)dx-xdy=0$$

1) 上式を完全微分型に変換する$y$のみに依存した積分因子$F(y)$を求めよ．

2) 問 1)で求めた積分因子を用いて，上式の一般解を求めよ．

(4) 次の常微分方程式の一般解を求めよ．ただし，一般解は虚数を用いない形で表せ．

$$\frac{d^2y}{dx^2}+4y=e^{x}\sin x$$

問題４.

三次元直交座標系（デカルト座標系）において，$x$ 軸，$y$ 軸，$z$ 軸の正の方向の単位ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$とする．$\boldsymbol{r}$ は曲線上の点の位置ベクトルを表す．閉曲面における面積要素ベクトル $d\boldsymbol{S}$ は外側向きを正とすること．以下の問いに答えよ．

(1) ベクトル場 $\boldsymbol{A} = 2z\boldsymbol{i} + \sqrt{y}\boldsymbol{j} + 2x\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{B} = 2x\boldsymbol{i} + 2z\boldsymbol{j} + \sqrt{y}\boldsymbol{k}$ について考える．また，曲線 $C_1$ を $x = t$, $y = t^2$, $z = 1 - t$, $(0 \leq t \leq 1)$ とする．

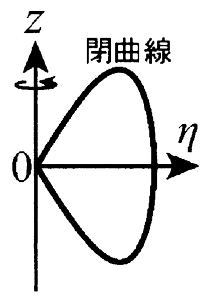
1) $\nabla \times \boldsymbol{A}$ と $\nabla \times \boldsymbol{B}$ を求めよ．

2) 曲線 $C_1$ 上の $t = 0$ から $t = 1$ までの線積分 $\int_{C_1} \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{r}$ を求めよ．

3) 曲線 $C_1$ 上の $t = 0$ から $t = 1$ までの線積分 $\int_{C_1} \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{r}$ を求めよ．

4) 曲線 $C_2$ を $x = \sin(\pi t/2)$，$y = \sin^2(\pi t/2)$，$z = \cos(\pi t/2)$，$(0 \leq t \leq 1)$ とする．$C_2$ 上の $t = 0$ から $t = 1$ までの線積分 $\int_{C_2} \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{r}$ および $\int_{C_2} \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{r}$ が問 2)および問 3)でそれぞれ求めた曲線 $C_1$ 上の線積分と同じ値を持つのは，$\boldsymbol{A}$ か $\boldsymbol{B}$ のどちらか一方である．どちらであるか答えよ．数式を用いてその根拠を示すこと．（ヒント：問 (1) - 1) に着目するとよい）

(2) $\eta = \cos u$, $z = \sin 2u$ $(-\pi/2 \leq u \leq \pi/2)$（$\eta$軸は原点を通り，$z$軸と直交）で与えられる閉曲線（図）を $z$ 軸回りに 360 度回した時に作られる閉曲面 $S$ 内の領域 $v$ について考える．




1) 閉曲面 $S$ 上の位置 $(x, y, z)$ を $\theta, u$ を用いて表せ．ここで，原点を中心として，$xy$ 平面上の $x$ 軸と $\eta$ 軸の成す角を $\theta$ とし，$\eta$ 軸が $x$ 軸と同じ方向のときを $\theta = 0$ とする．また，$\theta$ は $+z$ 方向から見て反時計回りを正の方向とする．

2) 閉曲面 $S$ における面積要素ベクトル $d\boldsymbol{S}$ を $\theta, u$ を用いて表せ．

3) あるベクトル場 $\boldsymbol{F}$ を用いると，領域 $v$ における体積 $V$ は $V = \int_v dv = \oint_S \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S}$ と書ける．以下の選択肢から適切な $\boldsymbol{F}$ を一つ選んで，体積 $V$を求めよ．

（ア）$\boldsymbol{F} = x\boldsymbol{i}$，（イ）$\boldsymbol{F} = (x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j})/\sqrt{2}$，（ウ）$\boldsymbol{F} = z\boldsymbol{k}$

問題５.

図１のように, 摩擦のない滑らかな斜面をもつ三角台の斜面上に質量 $m$ の質点を置き, 三角台を加速度 $\alpha$ ( $> 0$ )で水平右方向に運動させるとする. 座標系 ( $x, y$ )は三角台の斜面に図のように固定されている. 時刻を $t$, 質点が受ける垂直抗力を $R$, 重力加速度を $g$, 斜面の角度を $\theta$ ( $< \pi/2$ ) とするとき, 以下の問いに答えよ.

(1) 質点の $x$ および $y$ 方向の運動方程式を示せ.

(2) 質点が斜面上に静止したままの状態で保たれているとき, 加速度 $\alpha$ を $g$ と $\theta$ を用いて表せ. また, $R$ を $m, g, \theta$ を用いて表せ.

(3) 斜面が滑らかではなく, 摩擦があるとする. 静止摩擦係数が $\mu$ のとき, 質点が三角台に対して静止するための $\alpha$ の条件を $g, \theta, \mu$ を用いて表せ.

次に図 2 のように, 質量 $M$, 半径 $r$, 面密度一定の円板を摩擦のある斜面上に静かに置き, 三角台を加速度 $\alpha$ ( $> 0$ ) で水平右方向に運動させると, 円板は滑らずに $x$ の正方向に転がり始めた. 円板の重心 G の位置を ( $x_G$, $y_G$ ) とする.

(4) 円板の並進運動について, 重心 G の $x$ および $y$ 方向の運動方程式をそれぞれ示せ. ただし, 円板の重心まわりの慣性モーメントを $I_G$, 円板と斜面の間の摩擦力を $F$, 垂直抗力を $R$ とする.

(5) 円板の重心まわりの回転運動の運動方程式を示せ. ただし, 円板の角速度を $\omega$ とし, 図のように時計回り方向を $\omega$ の正の方向とする.

(6) 円板の重心を通り, 面に垂直な軸まわりの慣性モーメント $I_G$ を導出せよ.

(7) 任意の時刻 $t$ ( $> 0$ ) における円板の重心の速度 $\mathrm{d}x_G/\mathrm{d}t$ および位置 $x_G$ を $g, \alpha, \theta$ を用いて表せ. ただし, $t = 0$ のとき, $x_G = x_0$, $\mathrm{d}x_G/\mathrm{d}t = 0$ とする.

(8) 円板が $x$ の正方向に滑りながら転がっている状況を考え, 時刻 $t = 0$ のとき, $\mathrm{d}^2x_G/\mathrm{d}t^2 > 0$, $\mathrm{d}x_G/\mathrm{d}t = v_0$, $\omega = \omega_0$ であり, $r\omega_0 = 2v_0$ とする. 動摩擦係数を $\mu'$ とするとき, 滑らずに転がりはじめる時刻 $t'$ を $g, \alpha, \theta, v_0, \mu'$ を用いて表せ.

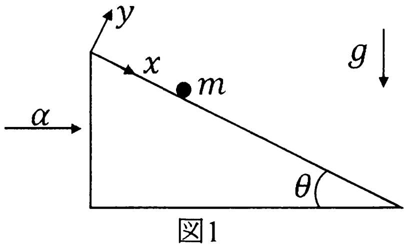


図1

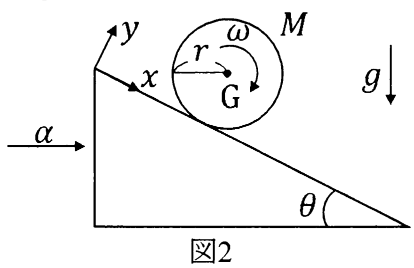


図2