名古屋大学大学院工学研究科博士前期課程

機械システム工学専攻

マイクロ・ナノ機械理工学専攻

航空宇宙工学専攻

専門部門 試験問題

（全８頁，表紙を含む）

2025 年 8 月 20 日（水）

9:00～12:00（3 時間）

注意事項

○５問の中から３問を選択して解答せよ．
○解答は，問題ごとに別の答案用紙に記入せよ．
○解答開始後，各答案用紙の所定の欄に受験番号，解答する問題番号を記入せよ．
○解答欄に何も記入できなかった場合でも，問題番号を必ず記入すること．
○答案の作成は黒色の鉛筆またはシャープペンシルに限る．
○この試験問題冊子および草稿用紙は試験終了後回収する．

問題1. 1 mol の気体を考える．p，V，T，H，S，C_pはそれぞれ気体の圧力，体積，絶対温度，エンタルピー，エントロピー，定圧比熱である．Rは一般気体定数である．以下の問いに答えよ．

(1) 図 1 (a) に示す通り，断熱流路内に断熱かつ摩擦無しのピストンが設置されている．p_1一定でピストンAを押すことで内部の気体が厚さを無視できる断熱の多孔質を通過し，p_2一定でピストン B を押しながら図 1 (b) の状態になった．

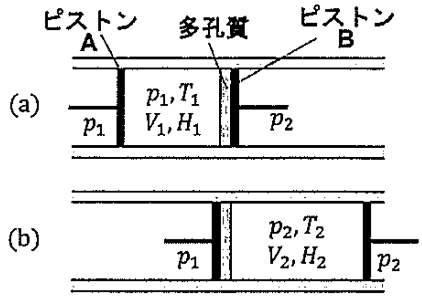


図 1

1) ピストン A および B を介して気体が周囲に行った仕事Wを求めよ．ただし，準静的過程と仮定する．

2) 熱力学第一法則を用いて，気体のエンタルピー変化$\Delta H = H_2 - H_1$を求めよ．

3) 気体が$pV = RT$およびC_p一定を満足するとき，T_1とT_2の関係を導出過程とともに示せ．

(2) ジュール・トムソン効果を考える．

1) 式①の熱力学第一法則は，C_pを用いて式②で表すことができる．式②のXおよびYをp，V，T，C_p，Rのうち必要なものを用いて，導出過程とともに示せ．

$$\mathrm{d}H = T\mathrm{d}S + V\mathrm{d}p \quad ① \qquad \mathrm{d}H = C_p \mathrm{d}T + \left\{X - Y\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p\right\}\mathrm{d}p \quad ②$$

2) $(\partial T/\partial p)_H$はジュール・トムソン係数$\mu$と呼ばれる．$\mu$を$V$，$T$，$C_p$，$(\partial V/\partial T)_p$を用いて表せ．

3) 気体が$pV = RT$を満足するときのμを導出過程とともに表せ．

4) 気体が式③のファン・デル・ワールスの状態方程式を満足するときのμをp，V，T，C_p，R，a，bを用いて表せ．なお，aおよびbはそれぞれ正の定数である．

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT \quad ③$$

5) 4) において，$\mu = 0$となるTをp，V，R，a，bを用いて表せ．

問題 2. 以下の問いに答えよ.

(1) 図 1 のような急拡大する管内に水が流れている. 水は急拡大部直後において壁面からはく離し, 損失が生じる. 急拡大部上流の断面 1 での断面積, 圧力, 流速をそれぞれA_1, p_1, v_1, 流れが付着した後の十分下流における断面 2 での断面積, 圧力, 流速をそれぞれA_2, p_2, v_2とする. 断面 1, 2 で圧力と流速は一様である. 水は密度ρの非圧縮性流体とする. 水と管壁との摩擦, および重力の影響は無視する.

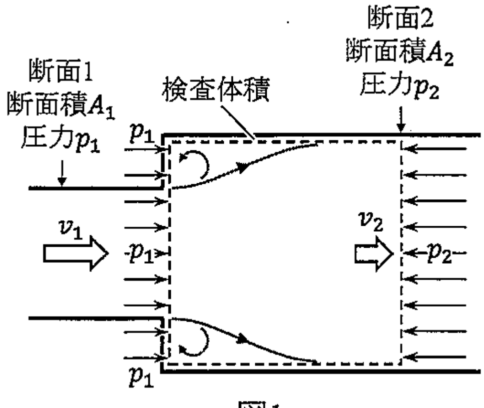


図1

1) A_1をA_2, v_1, v_2を用いて表せ.
2) 図 1 に破線で示した検査体積内の流体に作用する圧力による管軸方向の力の総和(図 1 の右向きを正とする)をA_1, A_2, p_1, p_2のうち必要なものを用いて表せ. なお図 1 の検査体積の左側面における圧力はp_1で一様である.
3) 単位時間あたりに, 検査体積から流出する運動量から, 検査体積へ流入する運動量を差し引いたものを, A_2, v_1, v_2, ρを用いて表せ.
4) 運動量の法則から$p_1 - p_2$をv_1, v_2, ρを用いて表せ.
5) 損失水頭(ヘッド)h_LをA_1, A_2, v_1, gを用いて表せ. ここでgは重力加速度である.

(2) 一様流速Uの流れに平行に二次元平板が置かれている. 図 2 のように座標系を定義する. 平板の先端の原点Oから境界層が発達し, 原点Oから流れ方向に距離xだけ離れた位置での境界層厚さはδであった. 流体は非圧縮性ニュートン流体とし, 密度をρ, 粘度をμとする. 境界層は全域で層流であり, はく離はないものとする. 圧力は一様とし, 重力の影響は無視する.

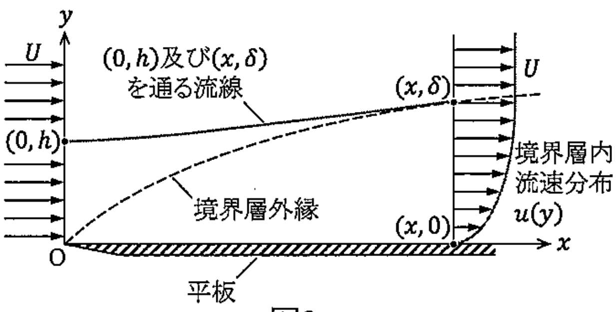


図2

1) 位置xにおける境界層内のx方向流速分布$u(y)$が以下のようにyの二次関数で表されるものとする.

$$u(y) = ay^2 + by + c \qquad (0 \le y \le \delta)$$

このときa, b, cを求めよ. なお境界層外縁で$\partial u/\partial y = 0$である.
2) 点$(0,h)$からの流線が点(x,δ)を通るとき, $h = (2/3)\delta$となることを示せ.
3) 位置xにおいて平板に作用するせん断応力τをU, δ, μを用いて表せ.
4) 運動量の法則を用い, 原点 O から位置xまでの範囲の平板に働く紙面奥行方向単位長さあたりの摩擦抗力DをU, δ, ρを用いて表せ. ただし平板の上面のみを考えること.
5) xを代表長さ, Uを代表流速とするレイノルズ数をRe_xとする. δ/xをRe_xを用いて表せ.

問題3．以下の問いに答えよ．重力加速度はgとせよ．

(1) 図 1 に示すように，中心を O とする半径Rの円弧形状の床面の上を，質量m，半径rの円板が滑ることなく転がり，円弧の最下点 A を中心に往復運動する．円板の中心を B とし，OA と OB がなす角度をθとする．往復運動はθが微小な範囲とし，$\theta = \alpha \sin \omega_n t$で表される．$\alpha$は微小であり，$t$は時間，$\omega_n$は固有角振動数を表す．円板が円弧の最下点にあるときに点 A と重なる円板上の点を A'として，BA'が鉛直方向となす角度を図 1 に示すようにϕとする．鉛直方向は OA の方向とする．

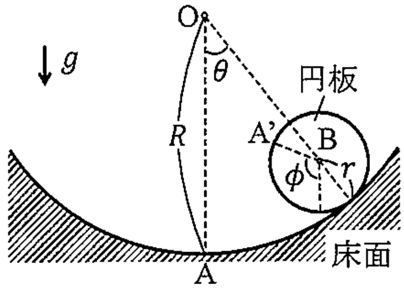


図1

1) 円板が円弧の最下点にある状態を基準とし，円板の位置エネルギーの最大値を求めよ．αは微小であるため，$\cos\alpha = 1 - (1/2)\alpha^2$ の近似式を用いよ．
2) 円板の運動エネルギーの最大値をR，m，r，ω_n，αの中から必要なものを用いて表せ．円板の回転軸まわりの慣性モーメントが $mr^2/2$ であることを用いよ．
3) ω_nをR，m，r，α，gの中から必要なものを用いて表せ．

(2) 図 2 に示すように質量の無視できる長さLの棒の先に質量Mの質点が取りつけられた二つの振り子が支点 P, Q で水平な天井に取りつけられている．二つの振り子は，ばね定数kのばねで天井からhの位置でつながれている．それぞれの振り子が鉛直方向となす角をθ_1，θ_2とする．振動の振幅は微小であるため，ばねは天井と平行を保って伸縮するとみなせる．また$\sin\theta_1 = \theta_1$，$\sin\theta_2 = \theta_2$，$\cos\theta_1 = 1$，$\cos\theta_2 = 1$と近似せよ．空気抵抗や支点まわりの摩擦は無視できる．

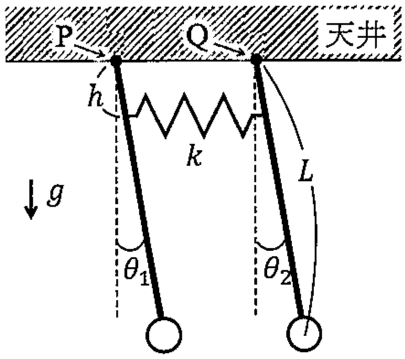


図2

1) 支点 P, Q まわりの振り子の運動方程式は次式で表される．行列(あ)と行列(い)を示せ．

$$\left[\quad (あ) \quad\right]\begin{bmatrix}\ddot{\theta}_1\\ \ddot{\theta}_2\end{bmatrix} + \left[\quad (い) \quad\right]\begin{bmatrix}\theta_1\\ \theta_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$

2) この振動系には二つの固有振動モードが存在する．それぞれの固有角振動数ω_1，ω_2を求めよ．ただし$\omega_1 < \omega_2$とする．
3) 二つの質点を手で保持して $\theta_1 = \beta$，$\theta_2 = 0$ で静止させた状態($\dot{\theta}_1 = 0$，$\dot{\theta}_2 = 0$)か

（問題 3 は次ページに続く）

ら，時刻 $t=0$ において静かに手を離した．ω_1，ω_2を用いて自由振動解を表せ．

4) 次の文章は，前問(2) 3)の振動に関する説明文である．

「図 3 のグラフは横軸が時間tであり，縦軸が$t=0$以降の$\boxed{\text{（う）}}$の時間変化を観測した結果である．このような現象は$\boxed{\text{（え）}}$とよばれるものであり，ばねを取りつける位置hが$\boxed{\text{（お）}}$場合や，ばね定数kが$\boxed{\text{（か）}}$場合に起こりやすい．図 3 において，実線で示した振動の角振動数は$\boxed{\text{（き）}}$であり，その振幅は破線で示す包絡線に沿って増減する．包絡線の角振動数は$\boxed{\text{（く）}}$である．」

空欄(う)(え)(お)(か)の当てはまるものを下記の選択肢①～⑩から選べ．同じ選択肢を複数回選択して良い．さらに空欄(き)と空欄(く)にあてはまる角振動数をω_1，ω_2を用いて表せ．

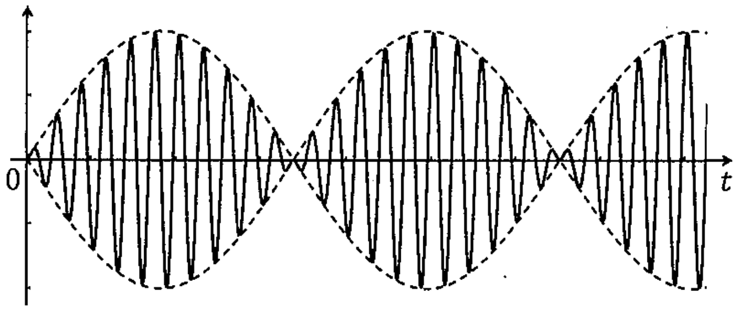


図3

選択肢

①θ_1　②θ_2　③$\theta_1+\theta_2$　④$\theta_1-\theta_2$　⑤共振　⑥自励振動

⑦うなり　⑧減衰振動　⑨大きい　⑩小さい

問題4. 以下の問いに答えよ．ただし，t は時刻，ω は角周波数，j は虚数単位とする．

(1) $u(t)$ をトルク，$\theta(t)$ を回転角としたとき，

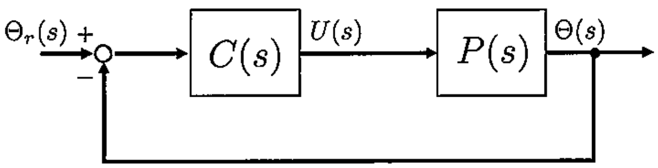
$$\ddot{\theta}(t) + 2\dot{\theta}(t) = u(t)$$

と表される回転モータの運動方程式を考える．

回転角の目標指令 $\theta_r(t)$ に対して，次のPD制御器を構成する．

$$u(t) = K_P(\theta_r(t) - \theta(t)) + K_D(\dot{\theta}_r(t) - \dot{\theta}(t)), \quad K_P > 0,\ K_D > 0$$

また，$\Theta_r(s)$, $\Theta(s)$, $U(s)$ をそれぞれ $\theta_r(t)$, $\theta(t)$, $u(t)$ のラプラス変換とし，制御器の伝達関数を $C(s)$，回転モータの伝達関数を $P(s)$ としたときのブロック線図を下図に示す．



1) $\Theta_r(s)$ から $\Theta(s)$ への閉ループ伝達関数 $T(s)$ をPDゲイン K_P, K_D を用いて表せ．

2) 閉ループ伝達関数 $T(s)$ が $-2 \pm 6j$ の2つの極を持つように K_P, K_D を設計せよ．

3) 2) で設計した K_P, K_D を用いて，$\Theta_r(s)$ から $\Theta(s)$ への閉ループ伝達関数 $T(s)$ の固有角周波数 ω_n，$\lim_{\omega \to 0} |T(j\omega)|$ および $\lim_{\omega \to \infty} |T(j\omega)|$ を求めよ．

4) 2) で設計した K_P, K_D を用いて，この系の感度関数 $S(s)$ を記述し，$\lim_{\omega \to 0} |S(j\omega)|$ および $\lim_{\omega \to \infty} |S(j\omega)|$ を求めよ．

5) 2) で設計した K_P, K_D を用いて，閉ループ伝達関数 $T(s)$ と感度関数 $S(s)$ のボード線図（ゲイン線図のみ）の概形を同一グラフ上に重ねて描け．ただし，$T(s)$ の固有角周波数を明記すること．なお，横軸は角周波数の対数軸，縦軸はdBとせよ．

6) $\theta_r(t) = t\ (t > 0)$ とし，有限な定常偏差となる K_P, K_D を考える．このときの定常偏差を K_P, K_D のうち必要なものを用いて表せ．

（問題4は次ページに続く）

(2) 次の線形システムを考える．

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}u(t), \quad y(t) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t)$$

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

1) 状態フィードバック $u(t) = -\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}(t)$ により，閉ループ系の極を -2, -4 に配置するための $\boldsymbol{K} = [k_1 \quad k_2]$ を求めよ．

2) 次のようなオブザーバを考える．

$$\dot{\hat{\boldsymbol{x}}}(t) = \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{B}u(t) + \boldsymbol{L}(y(t) - \boldsymbol{C}\hat{\boldsymbol{x}}(t))$$

ただし，$\hat{\boldsymbol{x}}(t)$ は状態の推定値である．
このとき，状態推定誤差 $\boldsymbol{e}(t) = \boldsymbol{x}(t) - \hat{\boldsymbol{x}}(t)$ が従う方程式を $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{K}, \boldsymbol{L}$ のうち必要なものを用いて表せ．

3) オブザーバの極を -6, -7 に配置するようなゲイン $\boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix}$ を求めよ．

4) 状態の推定値を用いた状態フィードバック $u(t) = -\boldsymbol{K}\hat{\boldsymbol{x}}(t)$ により制御器を構成する．このとき，制御対象，状態フィードバック制御器，およびオブザーバからなる系の拡大状態ベクトル $z(t) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}(t) \\ \hat{\boldsymbol{x}}(t) \end{bmatrix}$ に関する状態方程式 $\dot{z}(t) = \tilde{\boldsymbol{A}}z(t)$ を考える．行列 $\tilde{\boldsymbol{A}}$ を $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{K}, \boldsymbol{L}$ のうち必要なものを用いて表せ．

5) 状態方程式 $\dot{z}(t) = \tilde{\boldsymbol{A}}z(t)$ の極は，状態フィードバック系の極とオブザーバの極の和集合となることを示せ．必要に応じて，$\det(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = \det(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T})$ の関係式を用いてもよい．ただし，$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{K}, \boldsymbol{L}$ は記号のまま表記すること．

(1)

図 1 に示すように，左端 (点 A) を固定され，右端 (点 B) を単純支持された長さ $3l$ のはりについて考える．はりの断面は長方形で，その幅は b，高さは h，ヤング率は E である．はりの左端から $2l$, 右端から l の距離の点 C においてはりに垂直な荷重 P が図の下向きに作用している．また，はりの左端から右向きに座標 x(左端で $x=0$) が定義されている．以下の問いに答えよ．

1) はりの断面 2 次モーメント I が $bh^3/12$ となることを計算過程とともに示せ．

2) はりの左端に生じる曲げモーメントを M_A とおく．はりの左端と右端に生じる反力 R_A と R_B を P, l, M_A を用いて表せ．

3) このはりに生じる曲げモーメントの分布を A–C 間，C–B 間に分けて P, l, M_A, x を用いて表せ．

4) 左端に生じる曲げモーメント M_A を P と l を用いて表せ．

5) はりに生じるたわみの分布を A–C 間，C–B 間に分けて P, l, I, E, x を用いて表せ．

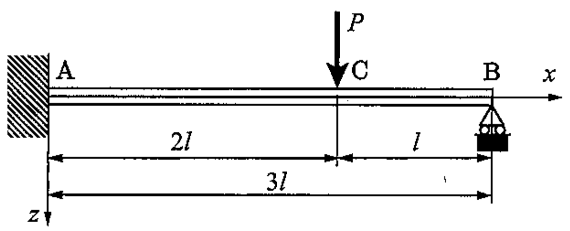


図 1

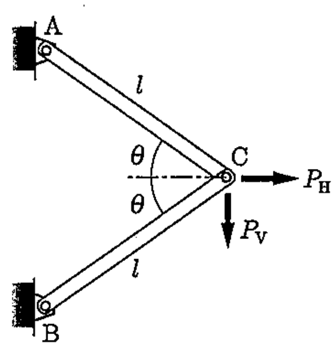


図 2

(2)

図 2 に示すような 2 本の部材からなるトラスがある．部材の長さはともに l, ヤング率は E, 断面積は S，部材と水平面とのなす角は θ である．2 本のトラスの結合点 C に水平方向右向きの荷重 P_H と下向きの荷重 P_V を加えた．以下の問いに答えよ．

1) 部材 AC に作用する荷重を P_A, 部材 BC に作用する荷重を P_B とおく (P_A, P_B はともに引張荷重を正とする)．それぞれの部材に生じる応力，ひずみ，伸びを P_A，P_B，S，E，l を用いて表せ．

2) 荷重 P_A，P_B，P_H，P_V，θ の間に成立する関係式を示せ．

3) 荷重 P_A，P_B を P_H，P_V，θ を用いて表せ．

4) 部材 AC と部材 BC に蓄えられる弾性ひずみエネルギーを S，E，l，θ，P_H，P_V を用いて表せ．

5) 荷重点 C の水平方向右向きの変位 δ_H と鉛直方向下向きの変位 δ_V を S，E，l，θ，P_H，P_V を用いて表せ．