名古屋大学大学院工学研究科博士前期課程

機械システム工学専攻

マイクロ・ナノ機械理工学専攻

航空宇宙工学専攻

基礎部門 試験問題

（全５頁，表紙を含む）

2025 年 8 月 19 日（火）

14:30～16:30（2 時間）

注意事項

○問題 1，2，3，4(数学)の 4 問全てに解答せよ.
○解答は，問題ごとに別の答案用紙に記入せよ.
○解答開始後，各答案用紙の所定の欄に受験番号，解答する問題番号を記入せよ.
○解答欄に何も記入できなかった場合でも，問題番号を必ず記入すること.
○答案の作成は黒色の鉛筆またはシャープペンシルに限る.
○この試験問題冊子および草稿用紙は試験終了後回収する.

問題１．

(1) 次の関数について，$\frac{dy}{dx}$ を求めよ．ただし，ここで log は自然対数とする．

1) $y = \frac{\sqrt{x}}{x^2+1}$

2) $y = x^{\log x}$

(2) 3 次元空間 xyz 内の曲面$f(x, y, z) = \log(xy + yz + zx) - 1 = 0$，$x, y, z > 0$ について以下の問に答えよ．ただし，ここで log は自然対数，e は自然対数の底である．

1) 曲面上の任意の点 (x_0, y_0, z_0) を通る接平面の方程式を求めよ．

2) 接平面のx, y 切片がそれぞれ $\left(\sqrt{3e},\ 0,\ 0\right)$, $(0,\ \sqrt{3e},\ 0)$ のとき，接平面の接点の座標とその点における法線の式を求めよ．

(3) パラメータ θ で表示された xy 平面内の曲線

$$x = a\cos^3\theta,\quad y = a\sin^3\theta \quad \left(0 \le \theta \le \frac{\pi}{2},\quad a > 0\right)$$

と，線分

$$x = 0 \quad (0 \le y \le a)$$

および x 軸で囲まれた領域を
~~でできる閉曲線を~~ x 軸周りに回転してできる立体を考える．当該の立体の表面積を求めよ．

問題２．

以下の問いに答えよ．

(1) 行列$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 2 & -1 & 2\end{pmatrix}$のとき，$\mathbf{A}^{-1}=\alpha\mathbf{A}^2+\beta\mathbf{A}+\gamma\mathbf{E}$ を満たす実数$\alpha,\ \beta,\ \gamma$の値を求めよ．ただし，$\mathbf{E}$は３次の単位行列である．

(2) 行列$\mathbf{B}=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1\\ -1 & -1 & 0\end{pmatrix}$について，以下の問いに答えよ．

1) $\mathbf{B}$の固有値$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$（$\lambda_1>\lambda_2>\lambda_3$とする）とそれらに属する固有ベクトル$\boldsymbol{e_1},\boldsymbol{e_2},\boldsymbol{e_3}$を求めよ．ただし，各固有ベクトルの第１成分を正の実数にし，かつ，固有ベクトルの大きさを１にすること．

2) 1)で求めた三つの固有ベクトル$\boldsymbol{e_1},\boldsymbol{e_2},\boldsymbol{e_3}$について，異なる固有値に属する固有ベクトルは直交することを示せ．

3) 1)で求めた三つの固有ベクトル$\boldsymbol{e_1},\boldsymbol{e_2},\boldsymbol{e_3}$を列ベクトルにもつ行列$\mathbf{U}=(\boldsymbol{e_1},\boldsymbol{e_2},\boldsymbol{e_3})$を用いて行列$\mathbf{B}$を対角化せよ．

(3) n次実対称行列$\mathbf{C}$（nは自然数）は実直交行列$\mathbf{P}$を用いて対角化できる．$\mathbf{P}$の各列ベクトルは正規直交基底をなす．ここで，実ベクトル $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^\top$ に対し，$f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^\top\mathbf{C}\boldsymbol{x}$と定義する．また，変数変換 $\boldsymbol{y}=\mathbf{P}^\top\boldsymbol{x}$ を考え，$\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^\top$とする．このとき，以下の問いに答えよ．ただし，$\top$は転置を表す．

1) $\boldsymbol{x}$を$\boldsymbol{y}$と$\mathbf{P}$を用いて表せ．

2) $f(\boldsymbol{x})$ を行列$\mathbf{C}$の固有値$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$および$y_1,y_2,\cdots,y_n$を用いて表せ．

3) $n=2$とし，その行列$\mathbf{C}$の固有値をλ_1,λ_2（$\lambda_1>0,\ \lambda_2>0$）とする．このとき$f(\boldsymbol{x})=k$（$k$は正の定数）という式が得られたとすると，それは$y_1y_2$座標系に対してどのような図形を表すか，固有値との関連で説明せよ．また，y_1軸，y_2軸は元のx_1x_2座標系に対してそれぞれどのような方向を向いているか，固有ベクトルとの関連で説明せよ．

問題３．

(1) 次の常微分方程式の一般解を求めよ．

$$x(y^2+3)\frac{dy}{dx}=y^2(x^2-1)$$

(2) 次の常微分方程式の一般解を求めよ．

$$\frac{dy}{dx}=\frac{5-3y-9x}{3+y+3x}$$

ヒント：$u=y+3x$とする．

(3) 次の常微分方程式の一般解を虚数を用いない形で求めよ．

$$\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{dy}{dx}+3y=x^2$$

問題４．

三次元直交座標系（デカルト座標系）において，x軸，y軸，z軸の正の方向の単位ベクトルをそれぞれ$\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$とする．以下の問いに答えよ．

(1) 平面$2x + 2y + z = 4$がx軸，y軸，z軸と交わる点をそれぞれ P，Q，R とする．３点 P，Q，R を頂点とする三角形を S とする．

1) スカラー場$\phi = x^2 + y - z + 2$の S 上における面積分$\iint_S \phi dS$の値を求めよ．

2) ベクトル場$\boldsymbol{A} = 3z\boldsymbol{i} + 3x\boldsymbol{j} + 3y\boldsymbol{k}$の S 上における面積分$\iint_S \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n} dS$の値を求めよ．ただし，$\boldsymbol{n}$は$S$の単位法線ベクトルであり，原点から離れる方向に向かう．

(2) 半球$x^2 + y^2 + z^2 = 1$ $(z \geq 0)$ とベクトル場$\boldsymbol{A} = y\boldsymbol{i} + 2x\boldsymbol{j} + 3z\boldsymbol{k}$に対して，半球が xy 平面につくる円を C，円 C を縁とする半球$x^2 + y^2 + z^2 = 1$ $(z \geq 0)$ の円 C を除いた曲面を S とする．以下の問いに答えよ．

1) 面積分$\iint_S (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}) \cdot \boldsymbol{n} dS$を求めよ．このとき，$\boldsymbol{n}$は$S$の単位法線ベクトルであり，原点から離れる方向に向かう．

2) ストークスの定理をつかわずに，円 C に沿った線積分$\int_C \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{r}$を求めよ．このとき，問 1)の $\boldsymbol{n}$ に対して原点を左に見る方向に線積分の向きをとる．